МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ЧАСТЬ 1

Учебно-методическое пособие для вузов

Составитель
В.Е. Петрова

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2010

Содержание

только тогда, когда заданное граничное условие достаточно гладко.

Гармоническая функция

Говорят, что в точке x функция $u(x)$ является гармонической, если в этой точке она имеет непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Функция $u(x)$ является гармонической в области D, если она

непрерывна в этой области и

гармонична во всех внутренних точках области,

стремится к нулю при $x \to \infty$ (т.е. к бесконечно удаленной точке) вдоль любого луча, принадлежащего области D в случае, когда область D бесконечна.

В силу этого регулярное решение для уравнения Лапласа является гармонической функцией, в рассматриваемой области.

Уравнения Лапласа решаются с помощью метода потенциалов простого и двойного слоя. Для решения граничной задачи с уравнением Лапласа также существуют другие эффективные методы, основанные на использовании функций комплексного переменного, т.е. задачи сводятся к граничным задачам теории аналитических функций, а математический аппарат для решения таких задач основан на применении интегралов типа Коши.

Бигармонические уравнения. Задачи, приводящие к бигармоническим уравнениям

К граничным задачам теории аналитических функций комплексных переменных приводятся также граничные задачи для бигармонических уравнений:

$$\triangle\triangle v = 0.$$

Развернутый вид бигармонического уравнения записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} = 0.$$

Под бигармоническими функциями будем понимать функции такие, которые

1. удовлетворяют бигармоническому уравнению;
2. их производные, вплоть до четвертого порядка, непрерывны;
3. производные, начиная со второго порядка, однозначны во всей рассматриваемой области.

Упругое равновесие твердого тела описывается уравнениями, представленными в задачах плоской теории упругости, в следующих случаях:

- плоской деформации цилиндрических тел постоянного поперечного сечения, при условии воздействия на тело лишь внешних сил, нормальных к его оси и одинаковых для всех поперечных сечений;
- обобщенного плоского напряженного состояния, т.е. при деформации тонкой пластины силами, действующими в её плоскости.

В обоих случаях решение поставленных задач сводится к решению бигармонических уравнений.

2 Некоторые сведения из теории аналитических функций

Пусть функция $W = f(z)$ есть однозначная функция, определенная в области D комплексной плоскости Z. Функция $W = f(z)$ дифференцируема в точке $z \in D$, если

$$\frac{\triangle W}{\triangle z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{\triangle z},$$

где $z + h$ — произвольная точка области D, стремится к определенному конечному пределу, когда $\triangle z = h$ произвольным образом стремится к 0 при постоянном z, т.е.

$$\lim_{\triangle z \longrightarrow 0} \frac{\triangle W}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \longrightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{\triangle z} = f'(z).$$

Однозначная функция $W = f(z)$ называется аналитической в области D, если в каждой точке этой области она имеет определенную конечную производную. Т.е. функция может быть аналитична только в некоторой области. О каждой конкретной точке такой области говорят, что в ней функция аналитична. При этом функция аналитическая в точке должна быть по определению аналитической в некоторой окрестности этой точки.

Замечание. Требование дифференцируемости по комплексной переменной является более сильным, чем аналогичное требование по действительной переменной. Действительно, предполагая функцию $f(z)$ дифференцируемой в некоторой произвольной точке z, мы считаем, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

будет одним и тем же числом независимо от направления, по которому переменная точка $z + h$ приближается к постоянной точке z.

Еще более сильным будет являться понятие функции, дифференцируемой в каждой точке области. Отсюда понятно, что аналитическая в области функция должна обладать рядом специфических свойств.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ есть однозначная функция комплексной переменной z, определенной в области D. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в области D. Тогда для того, чтобы функция $W = f(z)$ была аналитична в области D необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Эти условия показывают, что функции u и v не могут быть выбраны независимо друг от друга, чтобы получить аналитическую функцию $f(z)$. Дифференцируя первое уравнение (1) по x, второе по y и складывая результат, получим уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

т.е. $\triangle u = 0$. Аналогично можно получить $\triangle v = 0$. Следовательно, функции u и v являются гармоническими в области D. Отметим, что $u = Ref(z)$ и $v = Imf(z)$, поэтому аналитическая функция $f(z)$ является гармонической функцией. Однако, если взять за u и v две произвольные гармонические в области D функции, то $u + iv$ в общем случае не будет аналитической функцией в этой области. Для того, чтобы $u+iv$ была аналитической в области D, надо взять за одну из них произвольную гармоническую функцию, например u, и определить затем v из уравнений Коши – Римана (1).

Понятие голоморфности функции

Функция $f(z)$ есть голоморфная функция в точке a, если она в некоторой окрестности этой точки разлагается в степенной ряд относительно $(z - a)$. Это свойство голоморфности функции в точке a эквивалентно