МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. П.Г. ДЕМИДОВА

В.Г. Дурнев

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Учебное пособие

Рекомендовано Учебно-методическим советом по математике и механике
Учебно-методического объединения
по классическому университетскому образованию РФ
для математических специальностей и направлений подготовки университетов

ЯРОСЛАВЛЬ 2006

ŋqdþɐeɎ þɆ dedɆbɎɜe d ɛɔɑbɔɐ ɈqddɎqɐè

УДК 510.6
ББК В 12 я 73
Д 84

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2006 года

Рецензенты:
кафедра алгебры и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого;
доктор физ.-матем. наук, профессор С.П. Струнков;
доктор физ.-матем. наук, профессор В.Н. Безверхний

Д 84 **Дурнев, В.Г.** Введение в математическую логику: учеб. пособие / В.Г. Дурнев; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. — 222 с.

ISBN 5-8397-0465-2

В учебном пособии излагаются основные понятия логики высказываний, исчисления высказываний, логики предикатов и исчисления предикатов.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 010100 Математика и по специальностям 010101 Математика и 090102 Компьютерная безопасность очной формы обучения. Оно может быть использовано при изучении дисциплин "Математическая логика", "Математическая логика и теория алгоритмов" и "Дискретная математика и математическая логика" (блок ОПД, ЕН), а также специальных дисциплин.

Библиогр.: 50 назв.

УДК 510.6
ББК В 12 я 73

ISBN 5-8397-0465-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

XX век был периодом бурного развития математической логики, в рамках которой аксиоматический метод изложения математических теорий, ведущий свое начало от древнегреческих математиков, был доведен до своего логического завершения — были формализованы, выражены на подходящем формальном языке, не только основные положения ряда математических теорий, но и логические средства доказательства теорем в этих теориях. Была установлена возможность формализации самой логики математических рассуждений, что позволило сделать процесс доказательства математических теорем объектом математического изучения. В этот же период установилась тесная связь математической логики с исследованиями в области оснований математики, с ее философскими вопросами. В рамках математической логики была разработана теория формальных языков, что сыграло важнейшую роль при разработке языков программирования. Именно в математической логике было выработано математическое уточнение интуитивного понятия алгоритма, которым к тому времени математики пользовались уже более двух тысяч лет. Это позволило установить существование неразрешимых алгоритмических проблем во многих разделах математики. Математическая логика имеет свой предмет и методы исследования, играет важную роль как в различных разделах математики, так и в ее приложениях, в частности в информатике.

К середине XX века математическая логика достигла немалых успехов в постановке и решении принципиально новых математических проблем. Она действительно стала, как говорил П.С. Порецкий, логикой по предмету, математикой по методу. В рамках математической логики было предложено точное математическое определение понятия “доказательство”, что позволило поставить вопросы о доказуемости и недоказуемости тех или иных математических утверждений. Были разработаны и методы установления недоказуемости. Это позволило, в частности, К. Геделю и П.Дж. Коэну доказать, что знаменитая *континуум-гипотеза Г. Кантора не зависит от остальных аксиом* общепринятых на сегодняшний день вариантов *аксиоматической теории множеств.*

Приведем мнения ряда авторитетных математиков о роли математической логики в конце XX века.

Дж. Шенфильд. “Математическая логика”. М.: Наука. 1975. «...*Математическая логика является не собранием разрозненных результатов, а действенным методом изучения некоторых наиболее интересных проблем, стоящих перед математиками.*»

Э. Мендельсон. “Введение в математическую логику”. М.: Наука. 1971. Введение. «*Глубокие и опустошительные результаты Геделя, Тарского, Черча, Россера, Клини и многих других были богатой наградой за вложенный труд и завоевали для математической логики положение независимой ветви математики.*»

При работе над пособием автором преследовалась цель — попытаться изложить с единых позиций основной, по его мнению, материал по математической логике, необходимый и в то же время в идейном отношении доступный студентам I–II курсов математических факультетов университетов. О некоторых особенностях отбора материала и выбранного нами способа его изложения будет сказано ниже. Заметим лишь, что автор больше заботился о ясности и полноте, чем о краткости изложения. Насколько это ему удалось — судить читателю. Автор сделал, что мог, пусть другие сделают больше.

При написании пособия использовались включенные в список литературы работы различных авторов на эту тему. Всем им, как и тем, чьи работы не включены в список литературы, однако оказали идейное влияние на формирование взглядов автора на предмет, мы выражаем искреннюю благодарность и признательность. О содержании пособия можно понять по его достаточно подробному оглавлению.

Первая глава посвящена рассмотрению логики и исчисления высказываний. Она начинается с вводного параграфа, содержащего необходимый материал по алфавитам, словам и операциям над ними. Второй параграф посвящен логике высказываний, как простейшему, но чрезвычайно важному, разделу математической логики. Центральными понятиями этого параграфа являются понятия интерпретации, истинностного значения формулы в интерпретации и логического следствия множества формул. Особое место в этом параграфе, как и во всей второй части, занимает теорема компактности для логики высказываний. Излагаются два доказательства этой теоремы, каждое из которых может быть преобразовано, хотя и не без дополнительных усилий, в доказательство чрезвычайно важной теоремы математической логики — теоремы компактности К. Геделя — А.И. Мальцева для логики предикатов. Эта теорема, особенно ее доказательство, конечно, трудна для студентов младших курсов. Однако в случае логики высказываний можно без особого труда понять как саму идею доказательства, так и технические детали, что несомненно поможет позже понять и доказательство в общем случае исчисления предикатов. Следующий параграф посвящен исчислению высказываний — вводятся логические аксиомы и правила вывода, вывод и вывод из множества гипотез, доказывается теорема дедукции. В качестве подготовки к доказательству теоремы адекватности для исчисления высказываний изучаются основные свойства отношения выводимости. Основной целью служит желание познакомить читателя на примере исчисления высказываний с некоторыми основными понятиями математической логики, теоремами и используемым в их доказательствах аппаратом, который в случае исчисления предикатов достаточно сложен и абстрактен.

Во второй главе рассматриваются основные вопросы логики и исчисления предикатов. Вводится понятие языка первого порядка, его синтаксиса и семантики. Основными изучаемыми понятиями являются понятие интерпретации, истинностного значения замкнутой формулы в интерпретации, понятие логического следствия, вывода и вывода из множества гипотез. Изложение достаточно целенаправленное — оно ориентировано на доказательство основной теоремы пособия — теоремы К. Геделя о полноте. Это и определило отбор соответствующего материала.

В заключительной части пособия приведены некоторые, на наш взгляд, полезные сведения из истории развития математической логики, сведения о некоторых ее создателях, чтобы у читателя не складывалось впечатление, что “математическая логика существовала вечно” и была создана неизвестно кем. Чтобы студент понимал, что изучаемое им было создано конкретными людьми, которым мы должны отдать дань уважения за их вклад в развитие общечеловеческой культуры.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность Михаилу Анатольевичу Башкину за неоценимую помощь в компьютерном наборе и придании пособию достойного внешнего вида.

ŋqdqɐeY bɆ dədɆbYɜə d ɒɔɑbɔɐ Ɉqddʎqɐè