Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

И. П. Иродова

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ОПЕРАТОРЫ В КУРСЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Рекомендовано
научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности Математика

Ярославль 2010

УДК 517
ББК В162я73
И 83

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2010 года

Рецензенты:

кандидат физ.-мат. наук, доцент Е. Р. Матвеев;

кафедра математического анализа Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского

И 83 **Иродова, И. П.** Линейные функционалы и операторы в курсе функционального анализа: Учеб. пособие/ И. П. Иродова; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГу, 2010. — 124 с.
ISBN 978-5-8397-0724-5

Пособие содержит основные и наиболее важные понятия теории линейных функционалов и операторов. Изложение ведется в форме задач и упражнений. Приводится достаточно большое число примеров с подробными решениями.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010100.62 Математика, по специальности 010101.65 Математика (дисциплина "Функциональный анализ и интегральные уравнения", блок ОПД), очной формы обучения.

Сборник подготовлен с использованием издательской системы LaTeX.

Библиогр.: 9 назв.

ISBN 978-5-8397-0724-5

Оглавление

Предисловие

Соединение идей и методов алгебры, геометрии, топологии и анализа дало новую отрасль математической науки — функциональный анализ. Как отмечается в [6], "его методы с успехом используются во многих разделах современной теоретической и прикладной математики. Более того, развитие таких дисциплин, как дифференциальные уравнения, теория управления, методы вычислений и др. вряд ли было бы столь успешным, если бы при этом не использовались идеи и методы функционального анализа." Это объясняет то обстоятельство, что функциональный анализ - одна из базовых дисциплин, которую изучают студенты, обучающиеся по специальности "Математика".

Курс "Функциональный анализ и интегральные уравнения" довольно сложен. Это связано с высокой степенью абстракции вводимых понятий. Именно абстрактность позволяет исследовать далекие на первый взгляд друг от друга вопросы. Поэтому необходимо научиться применять методы функционального анализа, а также освоить методику решения задач.

Настоящее учебное пособие отличается от учебной литературы, опубликованной по этой теме. Главное отличие состоит в том, что в пособии кроме необходимого кратко изложенного теоретического материала собрано большое число задач с подробными решениями. Следует отметить, что хотя задачи подобраны разной степени сложности, предпочтение отдается вычислительным задачам. Причина такого выбора заключается в желании помочь студенту научиться решать задачи. Здесь уместно напомнить высказывание А.Нивена - "Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед".

Учебное пособие разделено на параграфы. Каждый параграф начинается с необходимых определений. Часть теоретического материала содержится в задачах. В пособии отсутствуют полные математические доказательства, но приведены ссылки на литературу, где их можно найти.

В приложении даны индивидуальные задания, которые помогут проверить качество полученных знаний.

§ 1.

Линейные нормированные пространства

Множество L называется **линейным нормированным пространством**, если

1) L – линейное пространство с умножением на вещественные (комплексные) числа;

2) каждому элементу $x \in L$ ставится в соответствие вещественное число $\|x\|$, называемое **нормой**, причем предполагается, что выполняются следующие три условия:

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ только при $x = 0$;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для любого $x \in L$ и любого вещественного или комплексного числа λ;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in L$.

Приведем примеры наиболее часто встречающихся нормированных пространств.

1. Пространство l_p^n, $1 \leq p < \infty$. Элементами этого пространства являются упорядоченные наборы из n действительных чисел $x = (x_1, ..., x_n)$, $n \geq 1$. Норма определяется с помощью равенства

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Заметим, что в случае $p = 2$ мы получаем евклидово пространство R^n.

2. Пространство l_∞^n. Элементами пространства, так же как в предыдущем примере, являются упорядоченные наборы из n действительных чисел. Норма определяется по формуле

$$\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$