УДК 532.5:517.928.7

МЕТОД ОТОБРАЖЕНИЙ ПУАНКАРЕ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В ЖИДКОМ СЛОЕ МЕЖДУ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

А. Г. Петров

Институт проблем механики РАН, 117526 Москва

Исследование плоскопараллельного движения частиц несжимаемой среды сводится к исследованию гамильтоновой системы. Функцией Гамильтона является функция тока. Функция Гамильтона, периодически зависящая от времени, описывает периодический во времени процесс перемешивания несжимаемой среды в области. Перемешивание среды связывается с динамическим хаосом. Переход к динамическому хаосу изучается на основе анализа положения лагранжевых частиц в моменты времени, кратные периоду, — точек последования Пуанкаре. Множество точек последования Пуанкаре исследуется с помощью отображения Пуанкаре на фазовом потоке. Предлагается конструктивный метод построения отображений в параметрическом виде. Отображение строится в виде ряда по малому параметру. Показан ряд преимуществ параметрического метода по сравнению с методом производящих функций. Развитый метод применяется при исследовании движения частиц несжимаемой вязкой жидкости в слое между двумя круговыми цилиндрами. Внешний цилиндр неподвижен, а внутренний вращается относительно точки, не совпадающей с центрами обоих цилиндров. Найден оптимальный режим движения, при котором площадь области хаотизации максимальна.

Ключевые слова: гидродинамические системы, задача Коши, малый параметр, динамический хаос.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача Коши для уравнений Гамильтона системы с n степенями свободы:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = H_{\boldsymbol{Y}}, \quad \dot{\boldsymbol{Y}} = -H_{\boldsymbol{X}}, \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0, \quad \boldsymbol{Y}(t_0) = \boldsymbol{Y}_0, \quad H_{\boldsymbol{X}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{X}}, \quad H_{\boldsymbol{Y}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{Y}}, \qquad (1.1)$$

где $H(t, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = H(t + T, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ — произвольная достаточно гладкая T-периодическая функция; $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ — n-мерные векторы.

В настоящее время общепринятого определения хаотических движений не существует. Для систем с одной степенью свободы можно дать геометрически простое определение хаоса, хотя и математически нестрогое. В этом случае гамильтониан системы можно трактовать как функцию тока течения несжимаемой среды. Гамильтонова система (1.1) определяет движение лагранжевых частиц среды. Введем несколько понятий, необходимых для определения хаоса лагранжевых частиц.

На траектории $\boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0)$, $\boldsymbol{Y}(t, t_0, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0)$, определяемой из решения системы (1.1), рассмотрим положения точек $\boldsymbol{X}(t_n, t_0, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0)$, $\boldsymbol{Y}(t_n, t_0, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0)$, $t_n = t_0 + Tn$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ в моменты времени, кратные периоду. Такие точки называются точками последования Пуанкаре (ТПП).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00567).

Для плоскопараллельного течения несжимаемой среды существует функция тока, которая и будет гамильтонианом системы. Траектория лагранжевой частицы среды находится из решения задачи (1.1), а ТПП представляет собой след частицы при киносъемке с частотой кадров, соответствующей периоду T. ТПП образуют счетное множество точек на плоскости, которое зависит, вообще говоря, от t_0, $\boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{Y}_0$. Если множество ТПП принадлежит одномерной линии, то такая линия называется инвариантной кривой. При упорядоченном движении все множества ТПП образуют семейство инвариантных кривых. Движение, в котором множество ТПП заполняет двумерную область, будем называть хаотическим движением ТПП.

При периодической зависимости гамильтониана от времени множество ТПП может быть вычислено по рекуррентным формулам $(\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{Y}_n) = P^T_{t_0}(\boldsymbol{X}_{n-1}, \boldsymbol{Y}_{n-1})$ ($P^{\Delta t}_{t_0}$ ($\Delta t = t - t_0$) — отображение на фазовом потоке системы (1.1), т. е. решение задачи (1.1)). Отображение за период $P^T_{t_0}$ называется отображением Пуанкаре.

Следует отметить, что приведенное выше определение хаотического движения не зависит от t_0. Действительно, при изменении t_0 на $t_0 + \Delta t$, $0 < \Delta t < T$ множество ТПП преобразуется с помощью непрерывного отображения $P^{\Delta t}_{t_0}$. При этом одномерная линия или двумерная область переходит соответственно в одномерную линию или двумерную область. Если $\Delta t = kT$ кратно периоду, то отображение $P^{\Delta t}_{t_0} = P^{kT}_{t_0}$ переводит ТПП в себя. В противном случае Δt можно представить в виде $\Delta t = kT + \Delta t'$, $0 < \Delta t' < T$. Отображение $P^{\Delta t}_{t_0}$ тождественно отображению $P^{\Delta t'}_{t_0}$ и не меняет топологической структуры ТПП.

Для определенности выберем $t_0 = 0$, а при обозначении отображения Пуанкаре верхний и нижний индексы будем опускать: $P^T_0 = P$.

Исследование хаотичности движения с помощью отображений Пуанкаре называют методом сечений Пуанкаре [1–4]. Так как определение отображения Пуанкаре является сложной вычислительной задачей, обычно ТПП находятся численно, а аналитические методы применяются лишь для очень простых систем.

При исследовании систем с одной степенью свободы с гамильтонианом стандартной формы

$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \ldots, \tag{1.2}$$

где ε — малый параметр, используются следующие теоретические результаты. Известно, что автономная гамильтонова система (гамильтониан явно не зависит от времени) является интегрируемой. Лагранжевы частицы лежат на одномерных линиях тока $H(\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{Y}_n) = \mathrm{const}$, и движение упорядоченное. Для неавтономной системы стандартного вида асимптотическая процедура метода усреднения [5, 6] позволяет построить для любого целого $k > 0$ близкую к тождественной каноническую замену переменных $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ так, что с точностью до малых порядка ε^{k+1} уравнения для новых переменных будут иметь вид автономной гамильтоновой системы с гамильтонианом $\bar{H}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

Следует учесть принципиальную невозможность точного определения усредненного гамильтониана для любой гамильтоновой системы (1.1). Согласно теореме Нейштадта [7] последовательностью канонических замен гамильтониан системы можно привести к почти автономному виду $\bar{H}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) + R(t, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $|R| < C_1 \exp(-C/\varepsilon)$. Точное определение усредненного автономного гамильтониана возможно только для интегрируемых гамильтоновых систем. В общем случае улучшить оценку остаточного члена R нельзя.

При отсутствии экспоненциально малой добавки ($R = 0$) система имеет интеграл, и в случае одной степени свободы хаоса не наблюдается. Хаос вызывает экспоненциально малая величина $R(t, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, которую методами усреднения определить невозможно. Поэтому применение метода усреднения при исследовании перехода к хаотическим движениям в системах с одной степенью свободы не имеет смысла.

В соответствии с описанными результатами асимптотических методов имеет место следующая типичная картина нарастания хаоса в неинтегрируемых динамических системах при увеличении параметра ε. При достаточно малом ε множества ТПП лежат на инвариантных кривых $\bar{H}(\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{Y}_n) = \mathrm{const}$, определяемых методами усреднения с точностью до $R = C_1 \exp(-C/\varepsilon)$. В этом случае в силу малости R хаос практически незаметен. При некотором увеличении ε экспоненциальная добавка начинает проявляться, хаос становится заметным и площадь хаотизации достаточно быстро увеличивается с ростом ε.

Обычно появление хаоса связывают с существованием неустойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре [1–4, 8]. Неподвижной точке $P(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ соответствует периодическое решение с периодом T, неподвижной точке $P^k(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ — периодическое решение с периодом kT. Задача устойчивости по Ляпунову периодического решения сводится к решению задачи устойчивости неподвижной точки отображения с использованием метода показателей Ляпунова [3]. Поскольку аналитический вид отображения P неизвестен, показатели Ляпунова определяются численно. Ниже аналитически найдены отображение P и показатели Ляпунова в виде разложений по ε.

Доказательство хаотичности исходя из какого-либо строгого определения хаоса даже для системы с одной степенью свободы является чрезвычайно трудной задачей. Примеры доказательства хаотичности для некоторых простых отображений приведены в [9]. Для гамильтоновых систем для доказательства хаотичности используется теорема Мельникова [3], применение которой связано с вычислением достаточно сложного интеграла. Аналитически методом Мельникова можно доказать хаотичность движений математического маятника с вибрирующей точкой подвеса. В этой системе с гамильтонианом, периодически зависящим от времени, имеется сепаратриса, представимая в простом аналитическом виде, что позволяет использовать теорему Мельникова. Обычно проверка хаотичности с помощью теоремы Мельникова или другим способом осуществляется достаточно громоздкими численными методами.

Некоторые достаточно простые гидродинамические системы исследованы в [8] с помощью численного определения ТПП. Практически не изучено движение вязкой жидкости в области, граница которой меняется со временем. В работе [10] исследуется движение частиц несжимаемых сред с различной реологией в тонком деформирующемся слое. На границах слоя принимаются условия отсутствия касательной скорости. Численные расчеты показали, что в такой системе при малых числах Рейнольдса хаос практически отсутствует.

В настоящей работе предложен конструктивный параметрический метод построения отображений на фазовом потоке гамильтоновой системы. Показаны преимущества параметрического метода по сравнению с известным методом производящих функций. Основными из них являются простота и высокая точность вычисления точек последования Пуанкаре в большом диапазоне параметров.

Развитая асимптотическая теория описания перехода к хаотическому движению использована при исследовании сильновязкой жидкости в тонком слое между двумя эксцентрически вращающимися цилиндрами.

2. Уравнения, определяющие отображение Пуанкаре. *Метод производящих функций.* Метод производящих функций используется для канонических преобразований [11, 12]. Этот метод можно применить и для построения отображения Пуанкаре. Для простоты рассмотрим задачу Коши (1.1) для системы с одной степенью свободы (хотя все результаты нетрудно обобщить на общий случай системы с n степенями свободы). Отображение $\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{Y}_0 \to \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$, сохраняющее фазовый объем, представляется через дифферен-