МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С.А. Скляднев, С.В. Писарева

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
## (Множества. Метод математической индукции)

Учебное пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

ŋqdqayeY bE dəbEbYзə d ɛɔɑɓɔʎ ɟqdqYqʎè

## Содержание

## 1.2. Операции над множествами

Пусть $A$ и $B$ - произвольные множества; их *суммой* или *объединением* $A \cup B$ называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств $A$ и $B$ (см. рис. 1).

Аналогично определяется объединение любого (конечного или бесконечного) числа множеств. Пусть $A_\alpha (\alpha \epsilon B)$ - произвольные множества. *Объединением множеств* $A_\alpha$ называется множество тех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств $A_\alpha$, или

$$\bigcup_{\alpha \in B} A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in B, x \in A_\alpha\}.$$

Очевидно, что для любого $A$ выполняется $A \cup \emptyset = A$.

*Пересечением* $A \cap B$ множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как $A$, так и $B$ (см. рис. 2).

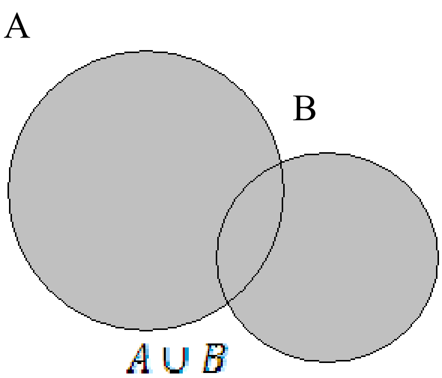


Рис. 1

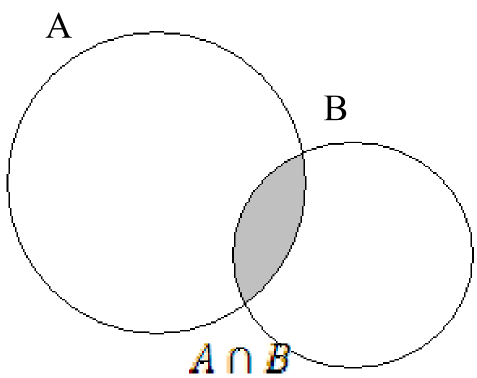


Рис. 2

Например, пересечение множества всех четных чисел и множества всех чисел, делящихся без остатка на три, состоит из всех целых чисел, делящихся без остатка на шесть.

Если множества $C$ и $D$ не имеют общих элементов, то $C \cap D = \emptyset$. В этом случае множества $C$ и $D$ называются непересекающимися.

Полезно отметить, что $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

*Пересечением* любого (конечного или бесконечного) числа множеств $A_\alpha (\alpha \epsilon B)$ называется множество элементов, принадлежащих каждому из множеств $A_\alpha$, или

$$\bigcap_{\alpha \in B} A_\alpha = \{x \mid \forall \alpha \in B, x \in A_\alpha\}.$$

Разностью множеств $A$ и $B$ (обозначается $A \backslash B$) называют множество, состоящее из тех элементов множества $A$, которые не принадлежат множеству $B$ (см. рис. 3). Ясно, что $A \backslash A = \emptyset$.

Если $B \subset A$, то $A \backslash B$ называют *дополнением множества B до множества A* (см. рис. 4).

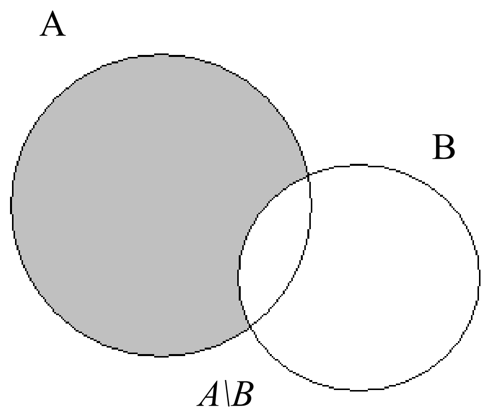


Рис. 3

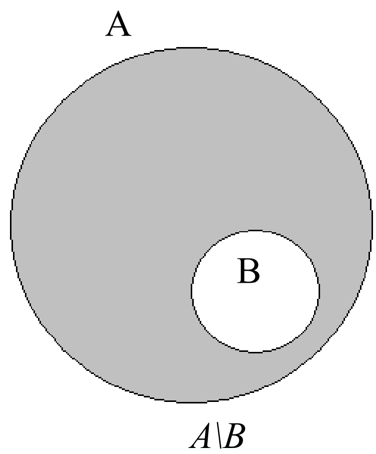


Рис. 4

В случае, когда рассматриваются различные подмножества множества $A$ (и только они одни), дополнение множества $B$ до множества $A$ называют просто *дополнением*.

Очевидно, что для любого множества $A$ выполняется $A \subset A$. Принято также считать, по определению, что пустое множество является подмножеством каждого множества: $\emptyset \subset A$. Для любого множества $A$ само $A$ и пустое множество называются его *несобственными* подмножествами. Если же $A \neq \emptyset$, $A \subset B$ и существует элемент $x \in B$ такой, что $x$ не принадлежит $A$, то $A$ называется собственным подмножеством множества $B$.

Пример 1. Даны множества $A$, $B$ и $C$. С помощью операций объединения и пересечения записать множество, состоящее из элементов, принадлежащих:

1) всем трем множествам; 2) хотя бы одному множеству; 3) по крайней мере двум этим множествам.

Решение. 1) $(A \cap B) \cap C$;

2) $(A \cup B) \cup C$;

3) $(A \cap B) \cup (C \cap B) \cup (A \cap C)$.

Пример 2. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, если $A=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$, $B=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Решение. $A \cup B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $A \cap B=\{-1, 0, 1\}$,

$A \backslash B=\{-4, -3, -2\}$, $B \backslash A=\{2, 3\}$.

### 1.3. Эквивалентные множества

Говорят, что между множествами $A$ и $B$ установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу множества $A$ сопоставлен



ŋqdqɏeɎ bɆ dedɆbɎɜe d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

один и только один элемент множества $B$, так что различным элементам множества $A$ сопоставлены различные элементы множества $B$ и каждый элемент множества $B$ оказывается сопоставленным некоторому элементу множества $A$.

Множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, называют *эквивалентными*.

Если множества $A$ и $B$ эквивалентны, то пишут $A \sim B$.

Если $A \sim B_1$, $B_1 \subset B$ и $B$ не эквивалентно $A$, то говорят, что множество $A$ имеет меньшую мощность, чем множество $B$.

Множество $A$ называется *конечным,* если существует такое число $n \in N$, что $A \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

В этом случае говорят, что множество $A$ содержит $n$ элементов или что множество $A$ имеет мощность $n$.

Мощность пустого множества принимается равной нулю.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

Множество $A$ называется *счетным*, если $A \sim N$ .

Множество называется *несчетным,* если оно имеет мощность, большую, чем мощность множества .

Теоремы Кантора.

1. Множество всех рациональных чисел счетно.
2. Множество всех действительных чисел несчетно.

Множество $A$ называется множеством *мощности континуума*, если $A \sim R$.

**Примеры с решениями**

Пример 1. Даны множества $A$, $B$, $C$. С помощью операций объединения и пересечения запишем множества, состоящие из элементов, принадлежащих: 1) всем трем множествам; 2) хотя бы одному множеству; 3) по крайней мере двум этим множествам.

Решение. 1) $(A \cap B) \cap C$;

2) $(A \cup B) \cup C$;

3) $(A \cap B) \cup (C \cap B) \cup (A \cap C)$.

Пример 2. Найти $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$, если $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$, $B = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

Решение. $A \cap B = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; $A \cap B = \{-1; 0; 1\}$; $A \setminus B = \{-4; -3; -2\}$; $B \setminus A = \{2; 3\}$.

**Задачи для самостоятельного решения**

Задача 1. Доказать, что включения $A \subset B$ и $B \subset A$ выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $A = B$.

Задача 2. Докажите, что равенство $A \cup B = B$ верно тогда и только тогда, когда $A \subset B$.