

УДК 512.05

Интернет-магазин

MANIFEST

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- техника

Внимание!

Новые проекты издательства РХД

- Электронная библиотека на компакт-дисках
<http://shop.rcd.ru/cdbooks>
- Эксклюзивные книги — специально для Вас любая книга может быть отпечатана в одном экземпляре
<http://shop.rcd.ru/exclusive>

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту № 00-01-14003

Шафаревич И. Р.

Основные понятия алгебры. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 352 стр.

Книга представляет собой общий обзор алгебры, ее основных понятий и разделов. Наряду с классическими разделами алгебры изложены многие современные понятия и результаты.

Предыдущее издание, вышедшее в 1986 г. в серии ВИНТИ «Итоги науки и техники», давно стало библиографической редкостью. В новом издании внесен ряд дополнений и уточнений, сделанных автором.

Для широкого круга специалистов, студентов, аспирантов физико-математических специальностей.

ISBN 5-93972-097-8

© И. Р. Шафаревич, 2001

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001

Содержание

Предисловие	7
§ 1. Что такое алгебра?	9
Идея координатизации. Примеры: словарь квантовой механики и координатизация конечных моделей аксиом сочетания и параллельности	
§ 2. Поля	15
Аксиомы поля. Изоморфизм. Поле рациональных функций от независимых переменных, поле рациональных функций на плоской алгебраической кривой, поле рядов Лорана и формальных рядов Лорана	
§ 3. Коммутативные кольца	23
Аксиомы кольца. Делители нуля и целостные кольца. Поле частных. Кольцо многочленов. Кольцо полиномиальных функций на плоской алгебраической кривой. Кольцо степенных рядов и формальных степенных рядов. Булевы кольца. Прямые суммы колец. Кольцо непрерывных функций. Разложение на множители. Факториальные кольца. Примеры факториальных колец	
§ 4. Гомоморфизмы и идеалы	32
Гомоморфизмы, идеалы, факторкольца. Теорема о гомоморфизмах. Гомоморфизмы ограничения в кольцах функций. Кольца главных идеалов. Связь с факториальностью. Умножение идеалов. Характеристика поля. Расширение, в котором заданный многочлен имеет корень. Алгебраически замкнутые поля. Конечные поля. Представление элементов общих колец как функций на максимальных и простых идеалах. Целые числа как функции. Ультрапроизведение и нестандартный анализ. Коммутирующие дифференциальные операторы	
§ 5. Модули	46
Прямые суммы и свободные модули. Тензорные произведения. Тензорная, симметрическая и внешняя степень модуля, двойственный модуль. Эквивалентность идеалов и изоморфизм модулей. Модули дифференциальных форм и векторных полей. Семейства векторных пространств и модули	

§ 6.	Алгебраический аспект размерности	56
	Ранг модуля. Модули конечного типа. Модули конечного типа над кольцом главных идеалов. Нётеровы модули и кольца. Нётеровы кольца и кольца конечного типа. Случай градуированных колец. Степень трансцендентности расширения. Конечные расширения	
§ 7.	Алгебраический аспект инфинитезимальных понятий	69
	Функции с точностью до бесконечно малых второго порядка и касательное пространство к многообразию. Особые точки. Векторные поля и дифференциальные операторы первого порядка. Бесконечно малые высших порядков. Струи и дифференциальные операторы. Пополнения колец, p -адические числа. Нормированные поля. Нормы поля рациональных чисел и рациональных функций. Поля p -адических чисел в теории чисел	
§ 8.	Некоммутативные кольца	84
	Основные определения. Алгебры над кольцами. Кольцо эндоморфизмов модуля. Групповая алгебра. Кватернионы и тела. Твисторное расслоение. Эндоморфизмы n -мерного пространства над телом. Тензорная алгебра и кольцо некоммутативных многочленов. Внешняя алгебра. Супералгебры. Алгебра Клиффорда. Простые кольца и алгебры. Левые и правые идеалы кольца эндоморфизмов векторного пространства над телом	
§ 9.	Модули над некоммутативными кольцами	101
	Модули и представления. Представления алгебр на матричном языке. Простые модули, композиционные ряды, теорема Жордана–Гёльдера. Длина модуля и кольца. Эндоморфизмы модулей. Лемма Шура	
§ 10.	Полупростые модули и кольца	108
	Полупростота. Полупростота групповой алгебры. Модули над полупростым кольцом. Полупростые кольца конечной длины: теорема Веддербёрна. Простые кольца конечной длины и основная теорема проективной геометрии. Факторы и непрерывные геометрии. Полупростые алгебры конечного ранга над алгебраически замкнутым полем. Применения к представлениям конечных групп	
§ 11.	Тела конечного ранга	122
	Тела конечного ранга над полем вещественных чисел и конечными полями. Теорема Тзена и квазиалгебраически замкнутые поля. Центральные тела конечного ранга над полем p -адических и полем рациональных чисел	
§ 12.	Понятие группы	129
	Группы преобразований. Симметрии. Автоморфизмы. Симметрии	

	динамических систем и законы сохранения. Симметрии физических законов. Группы, регулярное действие. Подгруппы, нормальные делители, факторгруппы. Порядок элемента. Группа классов идеалов. Группа расширений модуля. Группа Брауэра. Прямое произведение двух групп	
§ 13.	Примеры групп: конечные группы 145 Симметрические и знакопеременные группы. Группы симметрий правильных многоугольников и правильных многогранников. Группы симметрий решеток. Кристаллографические классы. Конечные группы, порожденные отражениями	
§ 14.	Примеры групп: бесконечные дискретные группы 165 Дискретные группы преобразований. Кристаллографические группы. Дискретные группы движений плоскости Лобачевского. Модулярная группа. Свободные группы. Задание групп соотношениями. Логические проблемы. Фундаментальная группа. Группа узла. Группа кос	
§ 15.	Примеры групп: группы Ли и алгебраические группы 185 Группы Ли. Торы. Их роль в теореме Лиувилля. Классические компактные группы и некоторые связи между ними. Классические комплексные группы Ли. Некоторые другие группы Ли. Группа Лоренца. Алгебраические группы. Группы аделей	
§ 16.	Общие результаты теории групп 199 Прямые произведения. Теорема Веддербёрна–Ремака–Шмидта. Композиционные ряды. Теорема Жордана–Гёльдера. Простые группы. Разрешимые группы. Простые компактные группы Ли. Простые комплексные группы Ли. Простые конечные группы	
§ 17.	Представления групп 210 Представления конечных групп. Соотношения ортогональности. Представления компактных групп. Интеграл по группе. Теорема Гельмгольца–Ли. Характеры коммутативных компактных групп и ряды Фурье. Тензоры Вейля и Риччи в четырехмерной римановой геометрии. Представления групп $SU(2)$ и $SO(3)$. Эффект Зеемана. Представления некомпактных групп Ли. Полная приводимость представлений конечномерных классических комплексных групп Ли	
§ 18.	Некоторые приложения групп 232 Теория Галуа. Разрешимость уравнений в радикалах. Теория Галуа дифференциальных уравнений. Классификация неразветвленных накрытий и фундаментальная группа. Первая основная теорема теории инвариантов. Представления групп и классификация элементарных частиц	

§ 19. Алгебры Ли и неассоциативная алгебра	246
Скобка Пуассона как пример алгебры Ли. Кольца и алгебры Ли. Теория Ли. Группы Ли и движения твердого тела. Числа Кэли. Квазикомплексная структура на шестимерных подмногообразиях восьмимерного пространства. Неассоциативные вещественные тела	
§ 20. Категории	264
Диаграммы и категории. Функторы. Функторы, возникающие в топологии: пространства петель, надстройки. Группы в категории. Гомотопические группы	
§ 21. Гомологическая алгебра	279
Комплексы и их гомологии. Гомологии и когомологии полиэдров. Теорема о неподвижной точке. Дифференциальные формы и когомологии де Рама. Теорема де Рама. Точная последовательность когомологий. Когомологии модулей. Когомологии групп. Топологический смысл когомологий дискретных групп. Пучки. Когомологии пучков. Теоремы конечности. Теорема Римана–Роха	
§ 22. K -теория	302
Топологическая K -теория. Векторные расслоения и функтор $Vec(X)$. Теорема периодичности и функторы $K_n(X)$. Группа $K_1(X)$ и бесконечномерная линейная группа. Символ эллиптического дифференциального оператора. Теорема об индексе. Алгебраическая K -теория. Группа классов проективных модулей. Группы K_0 , K_1 и K_n кольца. Группа K_2 поля и ее связь с группой Брауэра. K -теория и арифметика	
Комментарий к литературе	315
Литература	323
Именной указатель	334
Предметный указатель	337