

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Физико-математические науки

Математика

Дискретная математика и математическая кибернетика

Иванов С.А., аспирант Челябинского государственного педагогического университета

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕКУРСИВНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ СО ЗВЕЗДНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ СВЯЗЕЙ

Получены критерии устойчивости дискретных нейронных сетей со звездной топологией связей. Построены области устойчивости в пространстве параметров для таких сетей. Задача сводится к проблеме устойчивости матричных разностных уравнений высоких порядков с запаздыванием. Основным средством решения проблемы являются конусы устойчивости.

Ключевые слова: нейронные сети, разностные матричные уравнения, устойчивость разностных уравнений, звездные нейронные сети.

THE STABILITY OF THE RECURSIVE NEURAL NETWORKS WITH STAR TOPOLOGY

The stability conditions are described for the discrete neural networks with star topology. The stability domains in the parameters space are constructed. The problem reduces to the stability problem of the matrix difference higher order equations with two delays. The main tool is the stability cone.

Keywords: neural networks, difference matrix equations, stability, star networks.

Мы рассматриваем нейронные сети со звездной топологией связей с равным запаздыванием во взаимодействиях нейронов в сети.

В статье [1] приведены геометрические алгоритмы для проверки устойчивости матричного разностного уравнения с двумя запаздываниями.

Рассмотрим дискретную модель нейронной сети со звездной топологией связей. В модели взаимодействие различных нейронов запаздывает на k тактов. Данная система принадлежит классу матричных разностных уравнений вида

$$x_s = Ax_{s-1} + Bx_{s-k}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1)$$

которые обладают важным для нас свойством: матрицы A, B могут быть приведены к треугольному виду одним преобразованием. Поэтому мы имеем возможность применить метод конуса устойчивости [1] для изучения устойчивости этих уравнений.

Для сетей со звездной топологией уравнение (1) примет вид:

$$x_s = \gamma Ix_{s-1} + Bx_{s-k}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2)$$

где I – единичная матрица, γ коэффициент затухания собственных колебаний нейрона ($-1 < \gamma < 1$), матрица B характеризует взаимодействия нейронов в сети.

Для сети нейронов звездной конфигурации с l нейронами матрица взаимодействий B размера $l \times l$ примет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где a сила действия периферийного нейрона на центральный, b сила обратного воздействия.

Определение 1. Конусом устойчивости для уравнения вида (2) для данного k мы называем множество точек $M = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$, такое что

$$u_1 + iu_2 = \exp(ik\omega) - h \exp(i(k-1)\omega), u_3 = h, \quad (4)$$

где параметры h, ω связаны соотношениями

$$0 \leq h \leq \frac{\sin k\omega}{\sin(k-1)\omega}, -\frac{\pi}{k} \leq \omega \leq \frac{\pi}{k}. \quad (5)$$

Для применения теории конусов устойчивости необходимо знать собственные числа матрицы B . Для матрицы B порядка l собственные числа равны $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = 0$; $\mu_{l-1} = -\sqrt{lab}$, $\mu_l = \sqrt{lab}$.

Теорема 1 [1]. Пусть $A, B, S \in R^{l \times l}$ и $S^{-1}AS = A_T, S^{-1}BS = B_T$, где A_T, B_T треугольные матрицы с диагональными элементами λ_j, μ_j соответственно ($1 \leq j \leq l$). Построим точки $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}) \in R^3$ ($1 \leq j \leq l$) так что

$$u_{1j} + iu_{2j} = \mu_j \exp(-ik \arg \lambda_j), u_{3j} = |\lambda_j|. \quad (6)$$

Тогда уравнение (1) асимптотически устойчиво, если и только если все точки M_j лежат внутри конуса устойчивости (4), (5) для данного k . Если некоторая точка M_j лежит вне конуса устойчивости, то уравнение (1) неустойчиво.

Теорема 1 сводит задачу диагностирования устойчивости системы (1) l -го порядка к геометрической задаче в R^3 : асимптотическая устойчивость системы равносильна условию, что все точки M_j ($1 \leq j \leq l$) лежат внутри конуса устойчивости (4), (5) для данного k .

Определение 2. Овалом устойчивости для уравнений вида (1) для запаздывания $k > 1$ и параметра γ , мы называем кривую $M(\omega) = (u_1(\omega), u_2(\omega))$, такую что

$$u_1(\omega) + iu_2(\omega) = \exp(ik\omega) - |\gamma| \exp(i(k-1)\omega),$$

где $\omega \in (-\omega_1, \omega_1)$, где ω_1 есть наименьший положительный корень уравнения

$$|\gamma| = \frac{\sin k\omega}{\sin(k-1)\omega}.$$

Овал устойчивости для данного запаздывания k и данного γ это сечение конуса устойчивости (см. Определение 1) плоскостью $u_3 = |\gamma|$. Благодаря Теореме 1 для диагностирования устойчивости уравнения (2) достаточно проверить одну точку.

Теорема 2. Пусть даны произвольные $n, k \in \mathbb{Z}_+, k > 1$. Пусть $0 \leq \gamma \leq 1$. Построим в \mathbb{R}^2 овал устойчивости (см. Определение 2) для данных k, γ . Построим точку $M = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ так, что

$$u_1 + iu_2 = \sqrt{lab}.$$

Если точка M лежит внутри овала устойчивости, то система (2) асимптотически устойчива. В противном случае система (2) неустойчива.

Теорема 3. Система (2) асимптотически устойчива, если и только если $0 \leq ab < \frac{(|1-\gamma|)^2}{l}$

или $0 > ab > -\frac{F^2(\gamma)}{l}$. Здесь $F(\gamma) = \frac{\sin \omega(\gamma)}{\cos(k-1)\omega(\gamma)}$, где $\omega(\gamma)$ есть наименьший неотрицательный корень уравнения $|\gamma| = \frac{\sin k\omega}{\cos(k-1)\omega}$.

Области устойчивости системы (2) отражены на рисунках 2 и 3.

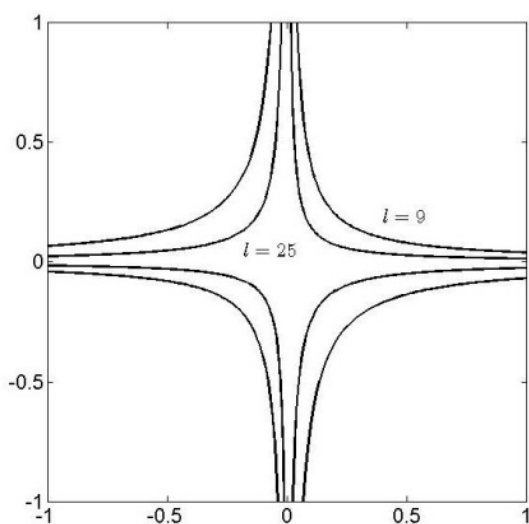


Рис.2. Области устойчивости в плоскости (a,b) при фиксированных $\gamma = 0.4, l = 9$ и переменном запаздывании k .

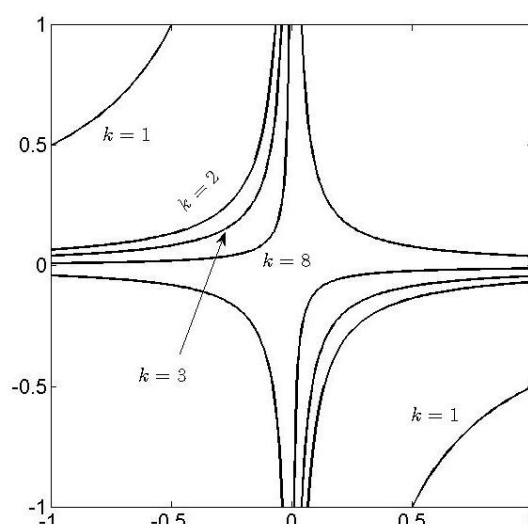


Рис.3. Области устойчивости в плоскости (a,b) при фиксированных $\gamma = 0.4, k = 2$ и переменном количестве нейронов l .

При стремлении к бесконечности запаздывания k границы области устойчивости, расположенные во второй и четвертой четвертях, приближаются к осям координат, а границы, расположенные в первой и третьей четвертях, остаются без изменения. При стремлении количества нейронов l к бесконечности область устойчивости стягивается в крест.