

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

**Д.Ф. Белоножко  
С.О. Ширяева  
А.И. Григорьев**

# **Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости**

Ярославль 2006

УДК 532.59:534.1  
ББК В 253.322  
Б 43

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве научного издания. План 2006 года*

**Рецензенты**

д-р физ.-мат. наук Коромыслов В.А.;  
кафедра прикладной математики и вычислительной техники  
Ярославского государственного технического университета

**Белоножко, Д.Ф.** Нелинейные волны на заряженной  
поверхности жидкости: моногр. / Д.Ф. Белоножко,  
С.О. Ширяева, А.И. Григорьев; Яросл. гос. ун-т  
им. П.Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 288 с.

ISBN 5-8397-0507-1 (978-5-8397-0507-4)

В монографии в рамках аналитического асимптотического моделирования рассмотрены нелинейные капиллярно-гравитационные волны на свободной поверхности идеальной и вязкой несжимаемой жидкости в плоской и цилиндрической геометриях.

Книга издана при поддержке грантов Президента РФ № МК-929.2003.01 и МД-1990.2005.1, а также грантов РФФИ № 03-01-00760, № 05-08-01147-а, №06-01-00066-а.

УДК 532.59:534.1  
ББК В 253.322

**ISBN 5-8397-0507-1  
(978-5-8397-0507-4)**

© Ярославский государственный  
университет им. П.Г. Демидова, 2006  
© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев,  
С.О. Ширяева, 2006

# 1. Введение. Периодические волны на однородно заряженной плоской поверхности несжимаемой жидкости

**1. Линейные волны.** Началом теоретического исследования периодических волн на заряженной поверхности жидкости является работа Я.И. Френкеля [1], в которой исследован вопрос об условиях реализации неустойчивости поверхности жидкости по отношению к избытку поверхностно распределенного электрического заряда. Л.А. Тонкс за год до появления работы Френкеля провел качественную оценку условий реализации этой неустойчивости [2]. Он получил критерий неустойчивости заряженной поверхности жидкости с точностью до коэффициента  $\approx 2$ , сравнивая лапласовское давление под искажением, в виде сферического сегмента, рельефа плоской поверхности с давлением на него однородного электростатического поля, направленного перпендикулярно невозмущенной поверхности.

На практике неустойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда проявляется в том, что при превышении поверхностной плотности заряда некоторого критического значения с поверхности жидкости начинается сброс электрического заряда в виде большого числа маленьких сильно заряженных капелек [3]. Сначала на поверхности образуются конусообразные выступы – конусы Тейлора. Затем с вершин этих выступов электрическое поле начинает отрывать заряженные капельки [4, 5].

Френкель строго вывел уточненный критерий неустойчивости в рамках метода нормальных мод [6]. Он рассмотрел в линейном по амплитуде волны приближении задачу определения спектра капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности идеальной несжимаемой, идеально проводящей бесконечно глубокой жидкости. В системе координат  $OXYZ$  с осью  $OZ$ , направленной вертикально вверх, и плоскостью  $OXY$ , совпадающей с равновесной в поле сил тяжести плоской поверхностью жидкости, полная математическая формулировка этой задачи имеет вид [1,7]:

$$z > 0: \quad \Delta\Phi = 0; \quad z < 0: \quad \Delta\varphi = 0;$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad -\rho g \xi - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \kappa_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0;$$

$$\Phi - 4\pi\kappa_0\xi = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi| \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty: \quad |\nabla \varphi| \rightarrow 0.$$

Здесь  $t$  – время;  $\xi = \xi(t, x)$  – отклонение свободной поверхности жидкости от плоской равновесной формы;  $\kappa_0$  – поверхностная плотность электрического заряда в равновесном состоянии;  $\rho$  и  $\gamma$  – плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости соответственно;  $g$  – ускорение поля силы тяжести;  $\varphi = \varphi(t, x, z)$  – потенциал поля скоростей в жидкости, обусловленный возмущением ее свободной поверхности;  $\Phi = \Phi(t, x, z)$  – добавка к величине электрического потенциала над поверхностью жидкости, вызванная отклонением формы этой поверхности от равновесной плоской. Для простоты движение жидкости считается не зависящим от координаты  $y$ .

Решение задачи Френкеля в комплексной форме имеет вид [1, 7]:

$$\xi = \zeta \exp(i(kx - \omega t)); \quad \omega = \sqrt{kg \left( 1 + k^2 \frac{\rho g}{\gamma} - kW \right)}.$$

Безразмерный параметр  $W > 0$  в дальнейшем будет называться параметром Тонкса-Френкеля. Он равен отношению электрических и лапласовских сил под искривлением свободной поверхности жидкости с характерным линейным масштабом, равным капиллярной постоянной жидкости, и определяется выражением:

$$W = \frac{4\pi\kappa_0^2}{\sqrt{\rho g \gamma}}.$$

Общим решением задачи Френкеля является суперпозиция синусоидальных прогрессивных волн различных длин  $\lambda = 2\pi/k$ , где  $k$  – волновое число. Принимается, что свободная поверхность жидкости подвержена тепловым возмущениям, которые в фиксиро-

рованный момент времени образуют рельефную структуру с характерной высотой складок  $\sim \sqrt{kT/\gamma}$ , где  $k = 8.31 \cdot 10^7 \text{ эрг}/(\text{моль} \cdot \text{град})$  – постоянная Больцмана. Согласно принципам гармонического анализа, такой рельеф можно представить суперпозицией «простейших гармонических складок». Решение Френкеля показывает, как такие простейшие возмущения, называемые в дальнейшем модами, будут эволюционировать во времени.

При  $0 \leq W \leq 2$  амплитуда всех возможных тепловых возмущений остается малой  $\sim \sqrt{kT/\gamma}$ . При  $W > 2$  существует интервал волновых чисел:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}} (W - \sqrt{W^2 - 4}) < k < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}} (W + \sqrt{W^2 - 4}),$$

для которых амплитуды возмущений экспоненциально растут во времени. В рамках линейного подхода это нарастание не ограничено (т.е. обеспечено до тех пор, пока амплитуда волны уже не сможет считаться весьма малой по сравнению с ее длиной).

Складывается следующая картина явления. Если  $0 \leq W < 2$ , то на свободной поверхности лапласовские силы преобладают над электрическими на вершинах возмущений равновесной поверхности, связанных со всеми возможными модами. Поэтому плоская равновесная форма свободной поверхности оказывается устойчивой по отношению к любым виртуальным возмущениям.

Для каждой моды с волновым числом  $k$  имеется свое пороговое значение параметра Тонкса-Френкеля

$$W_k = k \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} + \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}},$$

при котором на гребнях искажения свободной поверхности жидкости лапласовские и электрические силы в точности уравновешиваются. Любое, даже малое, превышение параметром  $W$  порогового значения приводит к нарушению равновесия в сторону доминирования электрических сил, стремящихся увеличить амплитуду возмущения. Мода с волновым числом

# Оглавление

<b>1. Введение. Периодические волны на однородно заряженной плоской поверхности несжимаемой жидкости.....</b>	<b>3</b>
1.1. Линейные волны.....	3
1.2. Нелинейные волны.....	7
<b>2. Нелинейные периодические волны на однородно заряженной поверхности электропроводной идеальной жидкости. Нелинейный анализ устойчивости заряженной поверхности жидкости.....</b>	<b>12</b>
2.1. Нелинейные периодические капиллярно-гравитационные волны на однородно заряженной поверхности идеально проводящей бесконечно глубокой идеальной несжимаемой жидкости.....	12
2.2. Нелинейные поправки к критическим условиям реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности электропроводной жидкости.....	37
2.3. Нелинейный анализ временной эволюции неустойчивой заряженной плоской свободной поверхности жидкости.....	42
2.4. Нелинейный анализ формы конуса Тейлора .....	63
<b>3. Нелинейные волны на поверхности вязкой жидкости.....</b>	<b>74</b>
3.1. <i>Нелинейные периодические волны на однородно заряженной поверхности электропроводной вязкой жидкости.....</i>	<i>74</i>
3.1.1. Решение задачи об аналитическом асимптотическом расчете капиллярно-гравитационного нелинейного периодического волнового движения в бесконечно глубокой вязкой электропроводной несжимаемой жидкости.....	74
3.1.2. Формы нелинейных капиллярно-гравитационных волн на свободной поверхности вязкой жидкости .....	94
3.1.3. Нелинейные капиллярно-гравитационные волны на заряженной свободной поверхности маловязкой жидкости .....	100
3.1.4. Влияние поверхностного заряда на формы нелинейных капиллярно-гравитационных волн на поверхности вязкой жидкости .....	113
3.2. О расчете волнового движения в рамках теории пограничного слоя.....	122

<b>4. Интерлюдия. Периодические волны на поверхности однородно заряженной цилиндрической струи несжимаемой жидкости. Дробление заряженных струй.....</b>	<b>148</b>
<b>5. Нелинейные неосесимметричные волны на однородно заряженной поверхности струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости .....</b>	<b>162</b>
<i>5.1. Одномодовая начальная деформация свободной         поверхности струи .....</i>	<i>162</i>
<i>5.2. Многомодовая начальная деформация.....</i>	<i>188</i>
<i>5.3. Аналитический расчет нелинейной поправки         к частоте волны конечной амплитуды         на поверхности заряженной струи .....</i>	<i>213</i>
<b>6. Аналитическое асимптотическое решение задачи о нелинейных осцилляциях толстой заряженной струи вязкой жидкости .....</b>	<b>239</b>
<b>7. Литература .....</b>	<b>265</b>
<b>8. Оглавление .....</b>	<b>285</b>