

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE SAINT - PÉTERSBOURG.

Ce journal paraît irrégulièrement par feuilles détachées dont vingt-quatre forment un volume. Le prix de souscription d'un volume est de 5 roubles assign. en Russie, et de 1½ écu de Prusse à l'étranger. On s'abonne, à *St.-Petersbourg*, au Comité administratif de l'Académie, place de la Bourse N. 2, et chez W. GRAEFF, libraire, commissionnaire de l'Académie, place de l'Amirauté N. 4. — L'expédition des gazettes du bureau des postes se charge de commandes pour les provinces, et le libraire LEOPOLD VOSS à Leipzig, pour l'étranger.

Le BULLETIN SCIENTIFIQUE est spécialement destiné à tenir les savants de tous les pays au courant des travaux exécutés par l'Académie, et à leur transmettre *sans délai* les résultats de ces travaux. A cet effet, il contiendra les articles suivants: 1. Extraits des mémoires lus dans les séances; 2. Notes de peu d'étendue *in extenso*; 3. Analyses d'ouvrages manuscrits et imprimés, présentés à l'Académie par divers savants; 4. Rapports; 5. Voyages scientifiques; 6. Extraits de la correspondance scientifique; 7. Ouvrages offerts et notices sur l'état des musées; 8. Chronique du personnel de l'Académie. 9. Annonces bibliographiques d'ouvrages publiés par l'Académie; 10. Mélanges.

SOMMAIRE. NOTES. 16. 17. 18. Notes sur différents sujets de l'analyse mathématique. OSTROGRADSKY. — VOYAGES SCIENTIFIQUES. 7. Lettre de M. SJÖGREN à M. KRUG.

NOTES.

16. 17. 18. NOTES SUR DIFFÉRENTS SUJETS DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE; PAR M. OSTROGRADSKY (lu le 1. décembre 1837).

16. *Sur les fonctions exponentielles.*

On peut diviser l'analyse générale en trois parties; en algèbre, théorie des nombres, et analyse transcendante. L'algèbre traite des opérations algébriques et des fonctions qui en résultent. Les opérations algébriques les plus usitées sont: l'addition, la soustraction, la multiplication, l'élevation aux puissances, l'extraction des racines, et la résolution des équations. Toutes les fonctions qui se composent d'un nombre fini de ces opérations, s'appellent algébriques. Celles d'entre elles qui ne contiennent pas la dernière opération, c'est-à-dire la résolution des équations, se nomment explicites, et l'on dit qu'une fonction est implicite quand elle renferme une ou plusieurs résolutions d'équations.

Dans un cours d'analyse (*) que j'ai fait l'année dernière, je n'ai point admis la division des fonctions en explicites et implicites. J'ai affecté un signe particulier, savoir ∇ ,

(*) Deux de mes auditeurs avaient recueilli les leçons dont il s'agit, et en y faisant beaucoup de changements et d'additions, qu'ils ont crus convenables, en ont déjà publié deux volumes in 8, sous le titre *Алгебраический Анализ* (analyse algébrique). Le

pour représenter la résolution des équations, et j'ai écrit

$$\nabla(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

pour la valeur de x fournie par l'équation

$$0 = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_n$$

Je ne prétends assurément pas que l'emploi du signe ∇ soit nécessaire; il est plus court d'exprimer les racines d'une équation par des lettres particulières. Mais, sans y affecter un signe convenable je serais difficilement parvenu à persuader à mes auditeurs, que la résolution des équations est une opération de même nature que les autres opérations algébriques, et qu'une fonction qui renferme autant que l'on veut de résolutions d'équations est parfaitement bien déterminée, ainsi que toute fonction $f(a_1, a_2, a_3 \dots a_n)$ dont on sache trouver la valeur pour toutes les valeurs des quantités $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$.

La seconde partie de l'analyse pure, c'est-à-dire la théorie des nombres, en se perfectionnant, finira par se fondre en partie avec l'algèbre, et en partie avec l'analyse transcendante. Mais actuellement on la considère à part. Cette science a pour but de déterminer pour quelle valeur particulière des quantités variables, les opérations auxquelles ces quantités peuvent être soumises se réduiraient à d'autres opérations plus simples.

troisième volume contenant le calcul différentiel, et le commencement de l'analyse transcendante, savoir, l'intégration des fonctions algébriques, quand les intégrales sont aussi des fonctions algébriques, va paraître prochainement.

Jusqu'à présent, les géomètres n'ont presque considéré que les valeurs pour lesquelles les opérations irrationnelles les plus simples, se réduisent aux opérations rationnelles. Mais on peut se proposer de déterminer, dans quel cas les opérations données, irrationnelles ou transcendentes, se réduisent à d'autres opérations, irrationnelles ou transcendentes, plus simples que les proposées. La réduction des fonctions intégrales, soit aux fonctions algébriques, soit à d'autres fonctions intégrales, appartient donc à la théorie des nombres.

Enfin la troisième partie de l'analyse pure, le calcul intégral ou l'analyse transcendante, a pour objet l'étude des fonctions transcendentes, c'est-à-dire des fonctions qui représentent un nombre infini d'opérations algébriques. La plus simple de ces opérations, l'addition répétée une infinité de fois, fournit les plus simples des fonctions transcendentes, et ces dernières donnent naissance à d'autres fonctions transcendentes qui leur sont inverses (*). Ces deux espèces de fonctions peuvent être soumises à un nombre limité ou infini d'opérations algébriques; il en résultera d'autres fonctions transcendentes qui, à leur tour, étant soumises aux opérations algébriques, en fourniront de nouvelles fonctions, ainsi de suite.

Quelques unes des fonctions transcendentes ont pu être étudiées, à cause de leur simplicité, sans le secours du calcul intégral, mais il est plus simple et plus naturel de déduire les propriétés de toutes les fonctions transcendentes d'une source commune.

La théorie des fonctions logarithmiques se déduit, comme on le sait, avec la plus grande facilité de $\int \frac{dx}{x}$. Si l'on représente $\int_1^x \frac{dx}{x}$ par lx , on démontrera sur le champ le théorème fondamental, et l'on déduira toutes les propriétés des logarithmes.

Soient maintenant $z = lx$, $u = ly$, $x = \varphi(z)$, $y = \varphi(u)$. φ désignant une fonction inverse de l , s'il s'agit d'en déterminer la nature. Or, comme $l(xy) = lx + ly = z + u$ nous aurons $xy = \varphi(z + u)$, donc

$$\varphi(z + u) = \varphi(z) \varphi(u).$$

En faisant $u = 0$, on trouve $\varphi(z) = \varphi(z) \varphi(0)$ donc $\varphi(0) = 1$; supposons $1 = \int_1^e \frac{dx}{x} = le$, nous aurons $e = \varphi(1)$.

(*) Si l'on représente la fonction transcendente $\int y dx$, y étant une fonction algébrique de x , par z ; la quantité x considérée comme fonction de z , sera ce qu'on peut appeler fonction inverse. J'ai proposé cette dénomination dans un mémoire lu à l'Académie en 1833.

L'équation $\varphi(z + u) = \varphi(z) \varphi(u)$ fournira pour toute valeur entière de m , $\varphi(mz) = (\varphi(z))^m$, $\varphi(z) = \left(\varphi\left(\frac{z}{m}\right)\right)^m$ d'où $\varphi\left(\frac{z}{m}\right) = (\varphi(z))^{\frac{1}{m}}$; remplaçant z par nz , n étant un entier, nous aurons $\varphi\left(\frac{n}{m}z\right) = \varphi(z)^{\frac{n}{m}}$, ou bien, en faisant $z = 1$, $\varphi\left(\frac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}}$.

Ainsi la fonction $\varphi(z)$ est déterminée toutes les fois que z obtient une valeur rationnelle, car elle devient, pour cette espèce de valeur, e^z ; or la notation e^z , pour z rationnel, présente une détermination complète. Supposons maintenant que z est quelconque, nous pouvons toujours admettre l'égalité $\varphi(z) = e^z$, car e^z représente bien $\varphi(z)$ quand z est rationnel, et pour les autres cas la fonction e^z ne dit ni plus ni moins que la fonction $\varphi(z)$, l'une est aussi inconnue que l'autre.

Remplaçant $\varphi(z)$ par e^z , nous aurons $e^{z+u} = e^z e^u$. Si de plus, on fait attention à ce que $dz = \frac{dx}{x} = \frac{d \cdot x}{x} = \frac{d \cdot e^z}{e^z}$, on trouvera $d \cdot e^z = e^z dz$; or les deux équations

$$e^{z+u} = e^z e^u, \quad d \cdot e^z = e^z dz,$$

déterminent complètement la nature de e^z ; on en tire facilement son expression en série, ainsi que ses autres propriétés.

17. Sur une espèce de fonctions des coordonnées sphériques.

Représentons par p et q deux angles renfermés, le premier entre les limites 0 et 2π et le second entre les limites 0 et π .

Quelques géomètres appellent coordonnées sphériques les trois quantités $\cos q$, $\sin q \cos p$, $\sin q \sin p$. Nous leurs conserverons ce nom, et nous parlerons dans cette note, des fonctions Y rationnelles et entières par rapport aux coordonnées sphériques $\cos q$, $\sin q \cos p$, $\sin q \sin p$, et satisfaisant à l'équation aux différences partielles

$$0 = \frac{1}{\sin q} \frac{d}{dq} \left(\sin q \frac{dY}{dq} \right) + \frac{1}{\sin^2 q} \frac{d^2 Y}{dp^2} + n(n+1) Y,$$

dans laquelle n désigne le degré de la fonction entière Y . Nous proposons en premier lieu d'exprimer la valeur générale de Y . Pour cela, désignons par X une fonction de trois quantités x, y, z rationnelle, entière, homogène, du degré n et satisfaisant à l'équation

$$0 = \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{d^2 X}{dy^2} + \frac{d^2 X}{dz^2}.$$

Si dans cette fonction, en la prenant la plus générale de son espèce, on remplace x, y, z par $\cos q, \sin q \cos p, \sin q \sin p$, on aura la valeur la plus générale de Y . Or toute fonction rationnelle, entière et homogène du degré n , des trois quantités x, y, z peut être symboliquement représentée par $(ax + by + cz)^n$, a, b, c étant des quantités dont les différentes puissances et produits doivent être remplacées par des lettres différentes. Ainsi, nous pouvons supposer

$$X = (ax + by + cz)^n$$

d'où

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{d^2 X}{dy^2} + \frac{d^2 X}{dz^2} = n(n-1)(ax + by + cz)^{n-2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

et par suite, nous aurons l'équation symbolique

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

à laquelle on satisfera en faisant

$$a^2 = \beta^2 - \gamma^2, \quad b^2 = \gamma^2 - \alpha^2, \quad c^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

α, β, γ étant des quantités quelconques: a^2, b^2, c^2 ayant les valeurs précédentes, nous aurons la valeur symbolique de Y au moyen de l'équation

$$Y = (a \cos q + b \sin q \cos p + c \sin q \sin p)^n$$

et pour en avoir la véritable valeur il n'y a qu'à éliminer de $(a \cos q + b \sin q \cos p + c \sin q \sin p)^n$, au moyen des équations $a^2 = \beta^2 - \gamma^2, b^2 = \gamma^2 - \alpha^2, c^2 = \alpha^2 - \beta^2$, les puissances de a, b, c supérieures à la première, et à remplacer les différentes puissances et produits $a^2, \beta^2, \gamma^2, a, b, c$ par des lettres différentes.

Si, par exemple $n = 2$, nous aurons $(a \cos q + b \sin q \cos p + c \sin q \sin p)^2 = a^2 \cos^2 q + b^2 \sin^2 q \cos^2 p + c^2 \sin^2 q \sin^2 p + 2ab \cos q \sin q \cos p + 2ac \cos q \sin q \sin p + 2bc \sin^2 q \cos p \sin p = (\beta^2 - \gamma^2) \cos^2 q + (\gamma^2 - \alpha^2) \sin^2 q \cos^2 p + (\alpha^2 - \beta^2) \sin^2 q \sin^2 p + 2ab \cos q \sin q \cos p + 2ac \cos q \sin q \sin p + 2bc \sin^2 q \cos p \sin p$, donc

$$Y = (B - C) \cos^2 q + (C - A) \sin^2 q \cos^2 p + (A - B) \sin^2 q \sin^2 p + 2D \cos q \sin q \cos p + 2E \cos q \sin q \sin p + 2F \sin^2 q \cos p \sin p;$$

A, B, C, D, E, F étant des constantes arbitraires. La plus remarquable des fonctions Y est celle qui représente le coefficient de α^n dans le développement du radical

$$\sqrt{[1 - 2\alpha(\cos q' \cos q + \sin q' \sin q \cos(p - p')) + \alpha^2]}$$

en série suivant les puissances de α . En sorte qu'en désignant par X_n cette fonction, on aura

$$\sqrt{[1 - 2\alpha(\cos q' \cos q + \sin q' \sin q \cos(p - p')) + \alpha^2]} = X_0 + X_1 \alpha + X_2 \alpha^2 + \dots + X_n \alpha^n + \text{etc}$$

p' et q' sont des angles renfermés entre les mêmes limites p et q . Les fonctions X jouissent de plusieurs propriétés remarquables, parmi lesquelles nous citerons les deux équations

$$\int X_n X_m \sin q dp dq = 0$$

$$\int X_n^2 \sin q dp dq = \frac{4\pi}{2n+1}$$

qui se démontrent très facilement, et dans lesquelles les intégrales doivent être prises dans toute l'étendue des valeurs que p et q peuvent recevoir. On prouve aussi très facilement que

$$\int Y X_n \sin q dp dq = 0;$$

mais si $m = n$, l'équation précédente doit être remplacée par celle-ci

$$\int Y X_n \sin q dp dq = \frac{4\pi}{2n+1} Y'$$

qui, pour être démontrée directement, présente plus de difficultés, et dans laquelle Y' désigne ce que devient Y quand on y fait $p = p', q = q'$. La démonstration directe de l'équation

$$\int Y X_n \sin q dp dq = \frac{4\pi}{2n+1} Y'$$

est l'objet principal de cette note. Pour parvenir à cette démonstration, je fais $\cos q' \cos q + \sin q' \sin q \cos(p - p') = \cos q$, et je remplace X_n par sa valeur $A \cos^n q + B \cos^{n-2} q + C \cos^{n-4} q + \dots$ où A, B, C, \dots sont des coefficients numériques dont nous n'aurons pas besoin d'écrire la valeur. Je remplace aussi $\sin q dp dq$ par un élément dS d'une surface sphérique décrite avec le rayon = 1. En faisant, pour abréger, $\int Y X_n \sin q dp dq = V$ j'aurai

$$V = A \int Y \cos^n q dS + B \int Y \cos^{n-2} q dS + C \int Y \cos^{n-4} q dS$$

les intégrales doivent être étendues à toute la surface sphérique. Or, comme $Y = (a \cos q + b \sin q \cos p + c \sin q \sin p)^n$, en posant, $a = r \cos \alpha, b = r \sin \alpha \cos \beta, c = r \sin \alpha \sin \beta$, et faisant, pour abréger, $\cos \alpha \cos q + \sin \alpha \sin q \cos(p - \beta) = \cos \omega$, j'aurai $Y = r^n \cos^n \omega$, ainsi

$$V = A r^n \int \cos^n \omega \cos^n q dS + B r^n \int \cos^n \omega \cos^{n-2} q dS + C r^n \int \cos^n \omega \cos^{n-4} q dS + \dots$$

On peut regarder les angles α, β, p', q', p et q comme servant à fixer la position des trois droites que nous désignons par (1), (2), (3); d'après la notation reçue, nous aurons $\omega = (1, 3), q = (2, 3)$. Désignons par δ l'angle (1, 2), en sorte que $\cos \delta = \cos \alpha \cos q' + \sin \alpha \sin q' \cos(p' - \beta)$ et par ϑ l'angle que le plan (1) (3) fait avec le plan (1) (2), nous aurons

$$\cos q = \cos \delta \cos \omega + \sin \delta \sin \omega \cos \vartheta.$$