

УДК 004.942 (075.8)
ББК 22.19 я73
О 23

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Северо-Кавказского федерального
университета

О 23 Обработка информации в системе остаточных классов (СОК):
учебное пособие / авт.-сост.: Н. И. Червяков, П. А. Ляхов, Л. Б. Копыткова, А. В. Гладков. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2016. – 225 с.

Пособие представляет курс лекций и подготовлено в соответствии с ФГОС ВО, одобрено на заседании кафедры прикладной математики и математического моделирования 29 августа 2016 г. (протокол № 1). Курс раскрывает основные принципы и особенности системы остаточных классов рассмотрены способы перевода в позиционную систему и обобщенно-позиционную систему счислений. Представляются способы расширения системы оснований. Рассматриваются корректирующие особенности системы остаточных классов, способы сравнения и представления комплексных чисел. Разбираются возможности применения СОК для цифровой обработки сигналов и методы обработки изображений.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 – Математика (магистратура), а также может быть полезно студентам направления «Прикладная математика и информатика» (магистратура) при изучении дисциплины «Использование математических пакетов для цифровой обработки сигналов».

Авторы-составители:

д-р техн. наук, профессор *Н. И. Червяков*,
канд. физ.-мат. наук, доцент *П. А. Ляхов*,
канд. физ.-мат. наук, доцент *Л. Б. Копыткова*,
ст. преподаватель *А. В. Гладков*

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *И. А. Калмыков*,
канд. техн. наук, доцент *С. В. Аникуев*
(«Ставропольский государственный аграрный университет»)

© ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский
федеральный университет», 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие..... 6

1. ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ (СОК) В ОБЛАСТИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

1.1. Систематические числа..... 8

1.2. Обобщенно-позиционная система счисления..... 13

1.3. Теоретико-числовые основы построения СОК. Китайская теорема об остатках..... 15

1.4. Диапазоны представления чисел. Определение системы остаточных классов. Выбор системы оснований СОК..... 22

1.5. Достоинства и недостатки СОК..... 28

2. МОДУЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ В СОК

2.1. Модульные операции в СОК..... 32

2.2. Индексы и их применение для представления информации в СОК..... 34

2.3. Введение знака в СОК при одном из оснований равном... 39

2.4. Правило сложения чисел разных знаков в СОК..... 41

2.5. Правило умножения чисел разных знаков в СОК..... 44

2.6. Введение знака в СОК с нечетными основаниями..... 47

3. НЕМОДУЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ В СОК. МЕТОДЫ ПЕРЕВОДА ИЗ ПСС В СОК И ОБРАТНО

3.1. Определение вычета числа, как составная часть операции перевода из ПСС в СОК..... 56

3.2. Метод ортогональных базисов перевода ИЗ СОК в ПСС... 61

3.3. Перевод в ОПСС..... 64

3.4. Интервальные методы перевода в ПСС..... 74

4. РАСШИРЕНИЕ ДИАПАЗОНА И ДЕЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В СОК

4.1. Расширение системы оснований, опирающееся на ранг и след числа..... 85

4.2. Расширение системы оснований с помощью характеристик ОПС..... 90

4.3. Алгоритм деления чисел на основания СОК с помощью перевода в ОПС.....	97
4.4. Алгоритм деления с помощью характеристик ранг и след числа.....	113
4.5. Масштабирование чисел в СОК.....	114
4.6. Общий случай деления.....	117

5. КОРРЕКТИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА КОДОВ В СОК

5.1. Основные факты, характеризующие корректирующие свойства кодов.....	123
5.2. Корректирующие свойства кодов в СОК.....	126
5.3. Корректирующие коды.....	128
5.4. Геометрическая модель избыточного кода в СОК.....	133
5.5. Обнаружение и локализация ошибок в СОК.....	140

6. СИСТЕМА ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

6.1. Сравнение целых комплексных чисел.....	144
6.2. Фундаментальная теорема Гаусса.....	146
6.3. Построение СОК в комплексной области на основе теоремы Гаусса.....	151
6.4. Отображение комплексного числа на пары действительных чисел.....	157
6.5. Метод представления комплексных чисел В СОК, опирающийся на их представление в виде матрицы.....	160

7. ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ (ЦОС). ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

7.1. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.....	166
7.2. Быстрые алгоритмы коротких сверток.....	168
7.2.1. Алгоритм перекрывания с суммированием.....	168
7.2.2. Алгоритм перекрытия с накоплением.....	170
7.2.3. Алгоритм Кука – Тоома.....	171
7.2.4. Алгоритм винограда вычисления коротких сверток.....	171
7.3. Квантование чисел и сигналов.....	173
7.4. Использование нейросетевых технологий в задачах обработки сигналов.....	174

Обработка информации
в системе остаточных классов

7.5. Приближение нейронной сети к СОК и алгоритмам цифровой обработки сигналов..... 178

**8. МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ
В СИСТЕМЕ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ**

8.1. Реализация алгоритмов вейвлет-анализа в модулярном базисе..... 187

8.2. Методы цифровой фильтрации с использованием вейвлетов конечного поля..... 199

8.3. Применение модулярной арифметики в цифровой обработке изображений..... 209

Литература..... 223

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие (курс лекций) по дисциплине «Обработка информации в системе остаточных классов (СОК)» подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования.

Данная дисциплина имеет **целью** формирование профессиональных компетенций (ПК-6) будущего магистра по направлению подготовки 01.04.01 – Математика.

К числу задач освоения курса относятся:

анализ и обобщение результатов научно-исследовательских работ в области модулярной арифметики с использованием современных достижений науки и техники, передового отечественного и зарубежного опыта; применение фундаментальных математических знаний и творческих навыков для быстрой адаптации к новым задачам, возникающим в процессе развития вычислительной техники и математических методов, к росту сложности математических алгоритмов и моделей; использование модулярного кодирования информации для решения теоретико-числовых задач, при нейросетевой обработке информации, в области цифровой обработки сигналов и в области защиты информации; умение применять полученные знания при изучении данной дисциплины при написании магистерских диссертаций путем модификации известных алгоритмов, улучшении их точностных и временных характеристик, разработки математических моделей для исследования отказоустойчивого функционирования модулярных нейрокомпьютеров, использования теоретических основ модулярной нейроматематики для решения прикладных задач в конечных кольцах и полях.

В ходе изучения дисциплины студенты получают навыки в использовании системы остаточных классов для выполнения различных математических операций. Кроме того, разбираются аспекты практического применения системы остаточных классов для цифровой обработки сигналов и обработки изображений.

Дисциплина «Обработка информации в системе остаточных классов (СОК)» служит основой для следующих дисциплин: «Модулярные нейрокомпьютерные технологии», «Защита информации в распределенных вычислительных сетях», «Применение системы остаточных классов и вейвлет-анализа в цифровой обработке сигналов» а также научно-исследовательской работы магистрантов и основой для выпол-

Обработка информации
в системе остаточных классов

нения выпускной квалификационной работы (магистерской диссертации), предусмотренных учебным планом указанной магистерской программы.

Освоение дисциплины позволит будущему магистру по направлению подготовки «Математика» полноценно осуществлять свою профессиональную деятельность, в частности, обладать следующими *профессиональными компетенциями*:

– способность к собственному видению прикладного аспекта в строгих математических формулировках (ПК-6).