ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

М.И. Каменский, А.М. Красносельский, Ю.В. Лысакова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ

Учебно-методическое пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Содержание

Доказательство.
Поскольку $\lambda_{m_k} \to \lambda_0 \neq 0$, то $\frac{1}{\lambda_{m_k}} G(h_{m_k})x$ является вполне непрерывным по совокупности переменных h_{m_k} и x оператором. Поскольку $\bigcup\limits_{m_k} G(h_{m_k})\Omega \subset G(H \times \Omega)$ и так как

$$e_m = \frac{1}{\lambda_m} G(h_m) e_m + \frac{1}{\lambda_m} y_m, \tag{1}$$

то в силу Леммы 1 имеем, что множество e_m – относительно компактно. Делая предельный переход в равенстве (1) при $m \to \infty$, получаем $e_0 = \frac{1}{\lambda_0} G(0) e_0$.

Лемма 3 *Предположим, что оператор $G(0)$ не имеет собственных значений в некотором замкнутом множестве $Z \subset C/\{0\}$, и множество Z – ограничено. Тогда для достаточно больших m и для $\lambda \in Z$ операторы $(\lambda I - G(h_m))^{-1}$ определены, нормы $\|(\lambda I - G(h_m))^{-1}\|$ ограничены общей константой и*

$$(\lambda I - G(h_m))^{-1} y \to (\lambda I - G(0))^{-1} y \quad \textit{при} \;\; m \to \infty$$

равномерно по λ и для любого $y \in E$.

Доказательство.

Для доказательства существования операторов $(\lambda I - G(h_m))^{-1}$ при достаточно больших m и $\lambda \in Z$ покажем, что $\sigma(G(h_m)) \bigcap Z = \emptyset$. Предположим противное, что существуют последовательности $\{\lambda_p\}, \{m_p\}$ и$\{x_p\}, p = 1, 2, \ldots$ такие, что $\lambda_p \in Z, m_p \to \infty, \|x_p\| = 1$ и $\lambda_p x_p = G(h_{m_p}) x_p$. Тогда по принципу равномерной ограниченности $\|G(hm_p)\|$ ограничены общей константой. Сделовательно, последовательность $\{\lambda_p\}$ ограничена. Тогда по Лемме 2 оператор $G(0)$ имеет собственное значение в Z, что противоречит условию.

Покажем теперь, что $\|(\lambda I - G(h_m))^{-1}\|$ ограничены общей константой. Предположим противное, существуют последовательности $\{\lambda_p\}, \{x_p\}, \{y_\}, \{m_p\}$ (p=1,2,...) такие, что $\lambda_p \in Z, \|x_p\| = 1, m_p \to \infty$ и

$$y_p = (\lambda_p I - G(h_{m_p}))^{-1} x_p \tag{2}$$

и $\|y_p\| \to \infty$ когда $p \to \infty$. Тогда из (2) получим

$$\lambda_p z_p = G(h_{m_p}) z_p + \|y_p\|^{-1} x_p.$$

Но тогда из Леммы 2 следует, что существует $\lambda' \in Z$ и $z_0, \|z_0\| = 1$ такие, что $\lambda' z_0 = G(0) z_0$. Это противоречит условиям Леммы 3.

Докажем, что для любых $y \in E, \|y\| = 1$ и $\lambda \in Z$

$$(\lambda I - G(h_m))^{-1} y \to (\lambda I - G(0))^{-1} y$$

когда $m \to \infty$ равномерно по λ. Предположим противное, что существуют $\mu_0 > 0, m_p$ и $\lambda_p \in Z$ такие, что

$$\|(\lambda_p I - G(h_{m_p}))^{-1} y - (\lambda_p I - G(0))^{-1} y\| \geq \mu_0, \;\; p = 1, 2, ... \qquad (3)$$

Без потери общности можно предположить, что последовательность $\{\lambda_p\}$ сходится к некоторой точке $\lambda' \in Z$. Тогда из (3) можно заключить, что существует такое N, что

$$\|(\lambda_p I - G(h_{m_p}))^{-1} y - (\lambda' I - G(0))^{-1} y\| \geq \frac{\mu_0}{2} \qquad (4)$$

для всех $p \geq N$. Положим

$$x_p = (\lambda_p I - G(h_{m_p})^{-1} y. \qquad (5)$$

Из доказанного ранее следует, что $\|x_p\|$ равномерно ограничены. Можно переписать (5) как

$$\lambda_p x_p = G(h_{m_p}) x_p + y.$$

Тогда из Леммы 2 следует, что подпоследовательность $\{x_{p_k}\}$ последовательности $\{x_p\}$ сходится к вектору x_0, который удовлетворяет равенству

$$\lambda' x_0 = G(0) x_0 + y.$$

Тогда $x_0 = (\lambda' I - G(0))^{-1} y$, то есть

$$(\lambda_{p_k} I - G(h_{n_{p_k}}))^{-1} y \to (\lambda' I - G(0))^{-1} y, \;\; k \to \infty,$$

что противоречит неравенству (4), поэтому последнее справедливо для всех $p \geq N$.

Лемма 4 *Если оператор $G(0)$ имеет простое собственное значение λ_0, тогда существует $\varepsilon > 0$ и существует m_0 такое, что для всех $m \geq m_0$ оператор $G(h_m)$ имеет единственное собственное значение λ_m, удовлетворяющее условию $|\lambda_m - \lambda_0| < \varepsilon$, причем это собственное значение простое.*

Доказательство.
Докажем вначале существование собственного значения λ_m оператора $G(h_m)$ в круге $B(\lambda_0, \varepsilon)$.

Предположим противное, что существуют ε_0 и $m_p, p = 1, 2, ...,$ такие, что $G(h_{m_p})$ не имеет собственных значений в круге $B(\lambda_0, \varepsilon_0)$. Пусть Γ_1 – граница круга $B(\lambda_0, \varepsilon_0)$. Рассмотрим проекторы P_{m_p}, соответствующие оператору $G(h_{m_p})$ и контуру Γ_1.

Поскольку внутри Γ_1 существует точка спектра оператора $G(0)$, то $P_0 \neq 0$, то есть $\exists x \neq 0$ в $P_0 E$. Но тогда $P_0 x = x$ и $P_{m_p} x = 0$, так как внутри контура Γ_1 нет точек спектра оператора $G(h_{m_p})$. Следовательно оператор $P_{m_p} x$ не сходится к оператору $P_0 x$, что противоречит Лемме 3.

Покажем теперь, что собственное значение λ_m – единственно в круге $B(\lambda_0, \varepsilon)$. Предположим противное. Тогда имеем: $\exists \lambda_m^1, \lambda_m^2$, $\exists e_m^1, e_m^2$ – линейно независимые векторы такие, что

$$\lambda_m^1 e_m^1 = G(h_m) e_m^1 \tag{6}$$

$$\lambda_m^2 e_m^2 = G(h_m) e_m^2 \tag{7}$$

При этом $\lambda_m^1, \lambda_m^2 \to \lambda_0$, $e_m^1, e_m^2 \to e_0$ при $m \to \infty$ и

$$\lambda_0 e_0 = G(0) e_0, \quad \lambda_0 \text{ - простое собственное значение оператора } G(0).$$

Введем проекторы

$$P_m x = x - \frac{< g_0, x >}{< g_0, e_m^1 >} e_m^1.$$

Из (6) и (7) следует

$$\lambda_m^2 (\alpha_m e_m^1 + P_m e_m^2) = \lambda_m^1 \alpha_m e_m^1 + G(h_m) P_m e_m^2.$$

Применим к обеим частям оператор P_m:

$$\lambda_m^2 P_m e_m^2 = P_m G(h_m) P_m e_m^2.$$

Следовательно $P_m e_m^2 = 0$ и e_m^1, e_m^2 линейно зависимы.

Покажем теперь, что λ_m – простое собственное значение. Предположим противное, то есть, что существует присоединенный вектор к собственному вектору, отвечающему собственному значению λ_m, то есть выполнены равенства

$$G(h_m) e_m = \lambda_m e_m \tag{8}$$

$$G(h_m) e'_m = \lambda_m e'_m + e_m \tag{9}$$