

УДК 517.518.4 (076.5)

ББК 22.161.5я73

К 85

Рецензент

кандидат физико-математических наук, доцент Л.М.Невоструев

Крючкова И.В.
К 85 **Тригонометрические ряды и преобразование Фурье:
методические указания/ И.В.Крючкова. – Оренбург: ГОУ ОГУ,
2006.-38 с.**

В методических указаниях рассмотрена теория тригонометрических рядов и преобразования Фурье, приводятся примеры решения задач, в том числе с использованием системы MathCAD, сформулированы задачи для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования, и преподавателей, ведущих занятия по данному разделу курса математического анализа.

ББК 22.161.5я73

© Крючкова И.В., 2006

© ГОУ ОГУ, 2006

Содержание

Введение.....	4
1 Ряды Фурье.....	5
1.1 Тригонометрический ряд.....	5
1.2 Теорема Дирихле.....	7
1.3 Неполные ряды Фурье.....	9
1.4 «Раздельная» запись ряда Фурье.....	10
1.5 Разложение функций, заданных на отрезке	11
1.6 Разложение в ряд Фурье на произвольном отрезке.....	14
1.7 Комплексная запись ряда Фурье.....	15
1.8 Указания к решению задач по теме «Тригонометрические ряды» в системе MathCAD.....	17
1.9 Примеры решения задач.....	18
2 Преобразование Фурье.....	27
2.1 Интеграл Фурье.....	27
2.2 Интеграл Фурье четной и нечетной функций.....	28
2.3 Косинус- и синус-преобразования Фурье.....	30
2.4 Комплексная форма записи интеграла Фурье.....	32
2.5 Указания к решению задач по теме «Преобразование Фурье» в системе MathCAD.....	33
2.6 Примеры решения задач.....	34
3. Задачи для самостоятельного решения.....	36
Список использованных источников.....	39

Введение

В настоящее время появилось много учебных пособий, излагающих теорию обобщенных рядов Фурье с точки зрения функционального анализа. Однако, такое общее изложение слишком далеко от прикладных задач, решаемых инженерами и специалистами в электротехнике, электронике и во многих других прикладных и теоретических дисциплинах.

В данных методических указаниях излагается теория тригонометрических рядов Фурье, преобразования Фурье. Изложение теоретического материала ведется на доступном для студентов уровне доказательности. В согласии с обычной практикой прохождения данного раздела курса математического анализа изложение проводится при помощи нестрогих, «эвристических» рассуждений, доказательство теоремы Дирихле о разложении в ряд Фурье опущено. Приводятся примеры решения задач, в том числе с использованием системы MathCAD.

Даны рекомендации по использованию символьного процессора MathCAD, что облегчит будущим инженерам применение теории преобразования Фурье в дальнейшей практической деятельности.

Методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования, и преподавателей, ведущих занятия по данному разделу курса математического анализа.

1 Ряды Фурье

1.1 Тригонометрический ряд

Системой тригонометрических функций называется совокупность функций:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (1.1)$$

Система тригонометрических функций является подмножеством множества непрерывных функций на всей числовой оси. Как известно множество непрерывных функций образует линейное пространство.

В этом пространстве скалярное произведение можно ввести следующим

образом: $(f(x); g(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Система тригонометрических функций (1.1) является ортогональной, т.е.

$$(f(x); g(x)) = \begin{cases} 0, & f(x) \neq g(x) \\ \pi, & f(x) = g(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

Оставляем читателю самостоятельно убедиться в этом.

Тригонометрическим рядом Фурье называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)), \quad a_n \in R, \quad b_n \in R \quad (1.3)$$

Так как $\cos nx, \sin nx$ - периодические функции с периодом $T = \frac{2\pi}{n}$, то сумма ряда (1.3), если она существует, имеет период $T = 2\pi$.

Предположим, что тригонометрический ряд сходится, причем равномерно, на отрезке $[-\pi; \pi]$. $S(x)$ - его сумма, она будет являться непрерывной функцией.

Рассмотрим ряды:

$$S(x) \cdot \cos Nx = \frac{a_0}{2} \cos Nx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx \cdot \cos Nx + b_n \cdot \sin nx \cdot \cos Nx) \quad (1.4)$$

$$S(x) \cdot \sin Nx = \frac{a_0}{2} \sin Nx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \sin Nx + b_n \cdot \sin nx \cdot \sin Nx) \quad (1.5)$$

Если тригонометрический ряд (1.3) сходится равномерно, то ряды (1.4) и (1.5) также сходятся равномерно, и их можно почленно интегрировать.

Проинтегрируем тригонометрический ряд (1.3):

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \cdot x)dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n \cdot x)dx)$$

И в силу утверждения (1.2):