МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Е. Б. Туленко

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ, ЕГО СВОЙСТВА И СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Учебно-методическое пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

Введение

Методическое пособие содержит материал по одному из важных разделов курса математического анализа. В нем приведены необходимые теоретические сведения, рассмотрено понятие двойного интеграла, описываются основные его свойства и способы вычисления. Ряд примеров с подробным описанием хода решения, а также индивидуальные задания различной сложности позволят студентам хорошо усвоить достаточно сложный материал. Особое внимание уделено методу сведения двойного интеграла к повторным как в случае декартовой системы координат, так и в случае перехода к криволинейным координатам, в частности к полярной системе координат. Последний раздел посвящен приложениям двойного интеграла к решению геометрических и физических задач. Пособие предназначено для изучения материала как на практических занятиях по математическому анализу, так и во время самостоятельной работы студентов.

1. Двойной интеграл

Рассмотрим замкнутую плоскую область D, и пусть эта область квадрируема, то есть имеет конечную площадь.

Если плоская область ограничена конечным числом кривых, заданных явными уравнениями, то такая область квадрируема.

Пусть на области D определена функция двух переменных $f(x, y)$. Разобьем область D произвольным образом (сеткой кривых) на n квадрируемых частей D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ так, чтобы они пересекались друг с другом не более чем по общей части границы (рис. 1).

ŋqdqɐeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɐ Ɉqddɏqɐè

2. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат (сведение к повторному)

I. Пусть область интегрирования D представляет собой криволинейную трапецию с основаниями, параллельными оси Oy, а снизу и сверху ограниченную непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ (рис. 2).

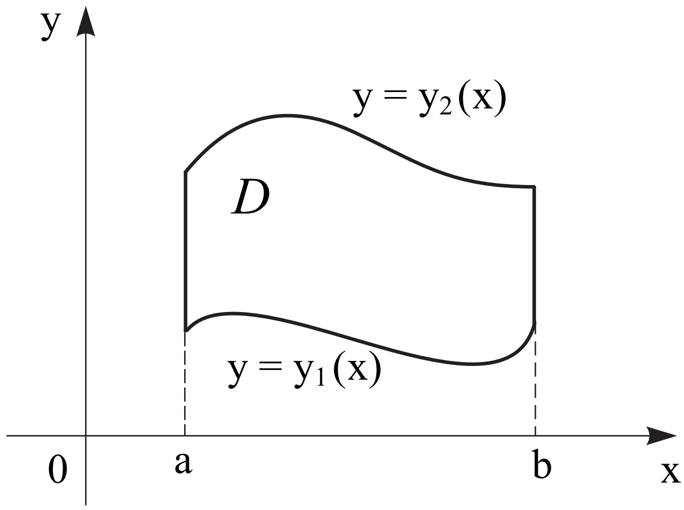

Рис. 2

Такую область интегрирования назовем *простой относительно оси Oy*.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема на D и для каждого фиксированного $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$, тогда существует повторный интеграл*

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

и он равен двойному

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

Таким образом, в случае *простой относительно оси* Oy области интегрирования справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (3)$$

II. Пусть область интегрирования D представляет собой криволинейную трапецию с основаниями, параллельными оси Ox, а слева и справа ограниченную непрерывными кривыми $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ (рис. 3).

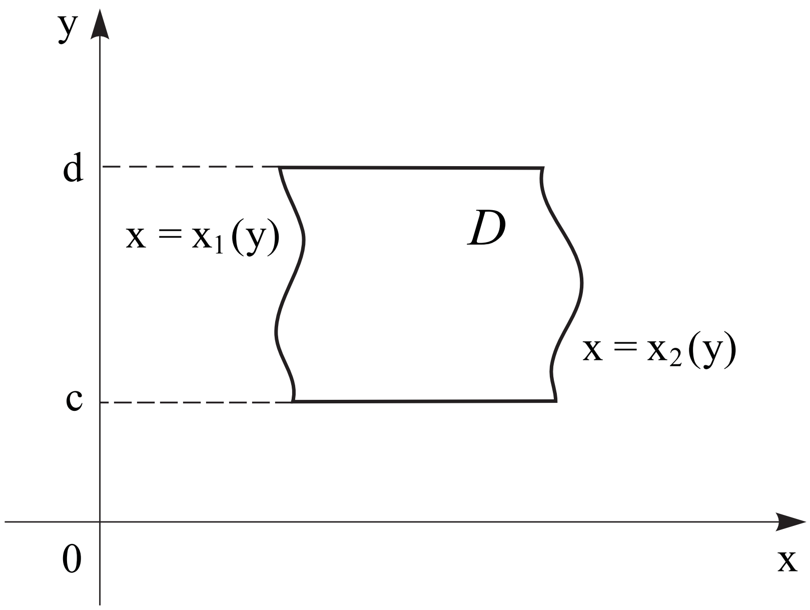

Рис. 3

Такую область интегрирования назовем *простой относительно оси* Ox.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x, y)$ *интегрируема на* D *и для каждого фиксированного* $y \in [c, d]$ *существует инте-*

грал $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$*, тогда существует повторный интеграл*

$$\int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

и он равен двойному

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

Таким образом для *простой относительно оси* Ox области интегрирования справедлива формула

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \tag{4}$$

В формулах (3) и (4) присутствуют повторные интегралы, которые отличаются друг от друга лишь порядком их вычисления. И в той и в другой формулах интегралы вычисляются справа налево, то есть сначала вычисляется интеграл, стоящий справа (внутренний интеграл), при этом переменная, которая не стоит под знаком дифференциала, считается постоянной, а затем вычисляется второй (внешний) интеграл от функции, полученной в результате вычисления внутреннего интеграла, по оставшейся второй переменной.

Замечание: нужно помнить, что в силу своего определения двойной интеграл – это число, поэтому пределы интегрирования во внешнем интеграле должны быть всегда постоянными, а пределы внутреннего интеграла могут зависеть от той переменной, которая не стоит в нем под знаком дифференциала.