

УДК 517.9  
ББК 22.161.166  
С80

С80 Джон Стилуэлл

Обратная математика. Доказательства, вывернутые наизнанку / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2021. – 198 с.: ил.

**ISBN 978-5-97060-888-3**

Эта книга – первое изложение обратной математики для аудитории, состоящей из математиков общего профиля. Обратная математика – новая дисциплина, которая «выворачивает наизнанку» традиционную математическую логику: ее цель – не вывод теорем, а поиск аксиом, которые позволяют доказать известные теоремы.

Джон Стилуэлл рассказывает о том, как найти «правильные» аксиомы для доказательства фундаментальных теорем. Придерживаясь исторического взгляда на обратную математику, он описывает два ставших возможными благодаря ей направления развития. Первое – проект арифметизации анализа, предпринятый в XIX веке с целью определить все понятия анализа в терминах натуральных чисел и их множеств. Второе – выполненная в XX веке арифметизация математической логики и понятия вычисления. Таким образом, арифметика в некотором смысле лежит в основе анализа, логики и вычислений. Обратная математика опирается на эту идею, рассматривая анализ как арифметику, дополненную аксиомами существования бесконечных множеств.

Книга будет интересна как студентам старших курсов, так и специалистам, интересующимся основаниями математики.

УДК 517.9  
ББК 22.161.166

Original English language edition published by by Princeton University Press. Copyright © 2018 by John Stillwell. All rights reserved. Russian-language edition copyright © 2021 by DMK Press. All rights reserved.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Материал, изложенный в данной книге, многократно проверен. Но, поскольку вероятность технических ошибок все равно существует, издательство не может гарантировать абсолютную точность и правильность приводимых сведений. В связи с этим издательство не несет ответственности за возможные ошибки, связанные с использованием книги.

ISBN 978-0-691-19641-1 (англ.)  
ISBN 978-5-97060-888-3 (рус.)

© John Stillwell, 2018  
© Оформление, перевод на русский язык,  
издание, ДМК Пресс, 2021



# Оглавление



<b>Предисловие .....</b>	<b>10</b>
<b>Глава 1. Историческое введение .....</b>	<b>13</b>
1.1. Евклид и аксиома параллельных .....	14
Аксиома параллельных .....	15
Эквиваленты аксиомы параллельных .....	16
1.2. Сферическая и неевклидова геометрия .....	17
Модели неевклидовой геометрии .....	20
Новые основания геометрии и математики .....	22
1.3. Векторная геометрия .....	22
Линейная геометрия Грассмана .....	23
Превращение векторного пространства в неевклидово .....	25
1.4. Аксиомы Гильберта .....	26
Алгебраическое содержание аксиом Гильберта .....	29
1.5. Полная упорядоченность и аксиома выбора .....	31
Несчетность .....	32
Полная упорядоченность .....	33
Теорема о полном упорядочении и аксиомы Цермело .....	34
Математический эквивалент аксиомы выбора .....	35
1.6. Логика и вычислимость .....	35
Арифметизация .....	37
<b>Глава 2. Классическая арифметизация .....</b>	<b>38</b>
2.1. От натуральных чисел к рациональным .....	39
Целые числа .....	39
Рациональные числа .....	40
Алгебраические свойства .....	41
2.2. От рациональных чисел к вещественным .....	41
Комплексные числа .....	43
2.3. Свойства полноты $\mathbb{R}$ .....	44
Последовательности вложенных отрезков .....	45
Критерий сходимости Коши .....	46

2.4. Функции и множества .....	47
Функции пересчета пар .....	47
Кодирование последовательностей и некоторых других функций.....	49
2.5. Непрерывные функции.....	49
Кодирование непрерывных функций рациональными интервалами .....	50
2.6. Аксиомы Пеано .....	52
Аксиомы следования .....	52
Аксиомы суммы и произведения.....	52
Индукция .....	53
Примеры доказательств по индукции .....	54
2.7. Язык PA.....	55
Упрощение связей.....	57
Предваренная форма .....	57
2.8. Арифметически определимые множества.....	57
$\Sigma_1^0$ -свойства.....	58
2.9. Пределы арифметизации .....	60
Диагональный метод Кантора .....	61
Определимость и вычислимость.....	61
<b>Глава 3. Классический анализ .....</b>	<b>63</b>
3.1. Пределы .....	63
Пределы последовательностей .....	63
Пределы функций .....	64
Предельные точки множества.....	65
3.2. Алгебраические свойства пределов .....	65
3.3. Непрерывность и промежуточные значения .....	67
Основная теорема алгебры.....	68
3.4. Теорема Больцано–Вейерштрасса.....	69
3.5. Лемма Гейне–Бореля .....	70
3.6. Теорема о достижении экстремальных значений.....	72
3.7. Равномерная непрерывность .....	73
Интегрируемость по Риману .....	75
3.8. Канторово множество .....	76
3.9. Деревья в анализе.....	77
Арифметизация деревьев.....	79
<b>Глава 4. Вычислимость .....</b>	<b>81</b>
4.1. Вычислимость и тезис Чёрча .....	82
4.2. Проблема остановки .....	84
4.3. Эффективно перечислимые множества.....	85
4.4. Вычислимые последовательности в анализе .....	88

4.5. Вычислимое дерево, не имеющее вычислимых путей .....	90
4.6. Вычислимость и неполнота .....	92
4.7. Вычислимость и анализ.....	93
Конструктивные подходы к анализу.....	94
<b>Глава 5. Арифметизация вычисления.....</b>	<b>97</b>
5.1. Формальные системы.....	98
5.2. Элементарные формальные системы Смаллиана.....	99
Примеры систем аксиом.....	100
5.3. Нотация для положительных целых чисел.....	101
Универсальные элементарные формальные системы .....	102
5.4. Анализ вычисления, предпринятый Тьюрингом .....	103
От машин Тьюринга к элементарным формальным системам.....	104
5.5. Операции над ЭФС-порожденными множествами .....	105
5.6. Порождение $\Sigma_1^0$ -множеств .....	107
5.7. ЭФС для $\Sigma_1^0$ -отношений .....	110
Булевы комбинации равенств.....	110
Ограниченные кванторы.....	111
5.8. Арифметизация элементарных формальных систем .....	112
Слова и числа.....	112
Конечные последовательности .....	113
ЭФС-порожденные множества – то же, что $\Sigma_1^0$ .....	115
5.9. Арифметизация эффективного перечисления .....	115
Арифметизация рекурсии .....	115
Эффективное перечисление.....	116
5.10. Арифметизация вычислимого анализа.....	118
Пример доказательства в $RCA_0$ .....	119
Минимальная модель $RCA_0$ .....	120
<b>Глава 6. Арифметическое выделение.....</b>	<b>121</b>
6.1. Система аксиом $ACA_0$ .....	122
Минимальная модель $ACA_0$ .....	122
6.2. $\Sigma_1^0$ -выделение и арифметическое выделение.....	123
$\Sigma_1^0$ -выделение и область значений функций .....	124
Индукция и системы более слабые, чем $ACA_0$ .....	125
6.3. Свойства полноты в $ACA_0$ .....	125
6.4. Арифметизация деревьев.....	129
6.5. Лемма Кёнига о бесконечном пути.....	130
6.6. Теория Рамсея .....	134
6.7. Некоторые результаты из математической логики .....	136

6.8. Арифметика Пеано в $ACA_0$ .....	140
Относительная непротиворечивость $ACA_0$ .....	141
<b>Глава 7. Рекурсивное выделение</b> .....	143
7.1. Система аксиом $RCA_0$ .....	144
7.2. Вещественные числа и непрерывные функции.....	145
7.3. Теорема о промежуточном значении.....	147
7.4. И снова о канторовом множестве.....	149
7.5. От леммы Гейне–Бореля к слабой лемме Кёнига.....	150
7.6. От слабой леммы Кёнига к лемме Гейне–Бореля.....	153
7.7. Равномерная непрерывность.....	155
7.8. От слабой леммы Кёнига к экстремальным значениям.....	157
7.9. Теоремы $WKL_0$ .....	160
Другие топологические теоремы.....	162
7.10. $WKL_0$ , $ACA_0$ и далее.....	163
«Большая пятерка» систем.....	164
Теоремы Краскала и Робертсона–Сеймура.....	165
<b>Глава 8. Более широкая картина</b> .....	168
8.1. Конструктивная математика.....	169
8.2. Логика предикатов.....	170
8.3. Виды неполноты.....	173
8.4. Вычислимость.....	176
Степени неразрешимости.....	176
И арифметически определимые множества.....	177
Низкие степени.....	177
8.5. Теория множеств.....	178
AB в элементарном анализе.....	179
8.6. Понятия «глубины».....	180
<b>Список литературы</b> .....	182
<b>Предметный указатель</b> .....	189