МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А. В. Ковалев, Т. Д. Семыкина

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Учебное пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее сложных задач в разделе математической теории пластичности является неодномерная упруговязкопластическая задача. Сложность ее состоит в том, что граница между областью, которая перешла в пластическое состояние, и областью, деформирующейся упруго, заранее неизвестна, и ее нужно определять в ходе решения задачи. Уравнения в упругой и пластической областях принадлежат к разным типам.

Пластические свойства материалов проявляются весьма разнообразно в зависимости от условий работы, типа нагрузок, структуры материала и т. д.

Здесь и далее квадратные скобки обозначают разность значений выражений, заключенных в скобки, соответствующих упругой и пластической областям.

По индексам, повторяющимся два раза, предполагается суммирование от 1 до 3, если не оговорено противное. Нижний индекс, стоящий после запятой, указывает на дифференцирование по координате, соответствующей этому индексу.

Уравнения (1.1.1)–(1.1.9) при учете условия несжимаемости

$$e_{\alpha\alpha} = 0 \tag{1.1.10}$$

представляют систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние упрочняющегося упруговязкопластического тела.

Так как в дальнейшем будем исследовать классы задач в основном в цилиндрической и сферической системах координат, то приведем вид уравнений равновесия (1.1.1) и формул Коши (1.1.6) в этих системах координат.

Уравнения равновесия имеют вид:

– в цилиндрической системе координат (r, θ, z):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \\
\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0, \\
\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0;
\end{gathered} \tag{1.1.11}$$

– в сферической системе координат (r, θ, φ):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\Big[2\sigma_r - \left(\sigma_\theta + \sigma_\varphi\right) + \tau_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta\Big] = 0, \\
\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\Big[3\tau_{r\theta} - \left(\sigma_\theta - \sigma_\varphi\right)\operatorname{ctg}\theta\Big] = 0, \\
\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\Big[3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta\Big] = 0.
\end{gathered} \tag{1.1.12}$$

Формулы Коши:

– в цилиндрической системе координат:

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right),$$

ŋqdqɐeⱯ bⱻ dədⱻbⱯзә d ɛɔɑbɔɐ Ɉqddʎqɐè

$$e_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \tag{1.1.13}$$

$$e_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right);$$

– в сферической системе координат:

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta,$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right),$$

$$e_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right), \tag{1.1.14}$$

$$e_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right).$$

1.2. Плоская задача механики деформируемого твердого тела

Если решение задачи сводится к определению двух переменных в некоторой плоской области, то такая задача называется плоской.

В МСС существуют 2 типа плоских задач:

1) плоско-деформированное состояние;

2) плоско-напряженное состояние.

Рассмотрим длинное призматическое тело, упирающееся торцами в абсолютно гладкие и абсолютно жесткие плиты. К телу приложены массовые и поверхностные силы, вектор которых лежит в плоскости торца. Силы равномерно распределены вдоль оси тела.

Высказанные гипотезы дают возможность предположить, что перемещения в декартовой системе координат *x, y* имеют следующий характер: $u(x,y), v(x,y)$, $w=0$. Отсюда следует, что поперечные сечения остаются плоскими и при деформировании имеет место

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0. \tag{1.2.1}$$

Плоское напряженное состояние реализуется в тонких пластинах, ограниченных цилиндрической поверхностью. К пластине приложены усилия, равномерно распределенные по толщине пластины, вектор которых параллелен плоскости пластины. В этом случае

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0. \tag{1.2.2}$$

В обоих случаях плоской задачи математическая постановка сводится к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \tag{1.2.3}$$

Закон Гука в упругой области:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} - \nu\varepsilon_{yy}\right),$$
$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}), \tag{1.2.4}$$
$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy},$$

для плоской деформации в качестве констант E и ν принимаются приведенные константы [3].

В пластической зоне закон Гука принимается для упругих составляющих деформаций.

В пластической зоне условие пластичности:

$$f\left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\right) = F\left(\sigma_1, \sigma_2\right) = 0; \tag{1.2.5}$$

и ассоциированного закона пластического течения для пластических компонент деформаций:

$$\varepsilon_x^p = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}; \ \varepsilon_y^p = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_y}; \ \varepsilon_{xy}^p = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}}. \tag{1.2.6}$$

Соотношения Коши для полных деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{1.2.7}$$

Представим решение в виде разложения по малому параметру:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty}\delta^n\sigma_{ij}^{(n)}, \quad u_i = \sum_{n=1}^{\infty}\delta^n u_i^{(n)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\delta^n\varepsilon_{ij}^{(n)}. \tag{1.2.8}$$

Очевидно, ввиду линейности уравнений (1.2.3) и (1.2.4) они сохраняют свой вид и для каждого члена разложения, поэтому для каждого члена разложения получаем решение с помощью функции напряжений Эри:

$$\sigma_r^{(n)} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta^{(n)} = \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta}^{(n)} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta}\right). \tag{1.2.9}$$