

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРАВОСУДИЯ

*Чернецов М.М.,
Карбачинская Н.Б.,
Лебедева Е.С.,
Харитонова Е.Е.*

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Под редакцией М.М. Чернецова

Москва
2016

УДК 22.1

ББК 51

М 34

Авторы:

Чернецов М. М., доцент кафедры общеобразовательных дисциплин ФГБОУ ВПО РГУП, кандидат философских наук

Карбачинская Н. Б., старший преподаватель кафедры общеобразовательных дисциплин ФГБОУ ВПО РГУП

Лебедева Е. С., старший преподаватель кафедры общеобразовательных дисциплин ФГБОУ ВПО РГУП

Харитонов Е. Е., старший преподаватель кафедры общеобразовательных дисциплин ФГБОУ ВПО РГУП

Рецензент:

Деза Е. И., доцент, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики ФГБОУ ВПО МПГУ

М 34 **Математика:** Учебное пособие / Под ред. М. М. Чернецова. 2-е изд., испр. и доп. — М.: РГУП, 2016. — 342 с.

ISBN 978-5-93916-481-8

Содержание учебного пособия соответствует Примерной программе изучения общеобразовательной дисциплины «Математика» в учреждениях начального и среднего профессионального образования.

В пособии содержится значительное число упражнений и кратко изложенный соответствующий теоретический материал по всем разделам, изучаемым в данной дисциплине: числовые множества, степени, корни, логарифмы, тригонометрия, начала математического анализа, прямые и плоскости, многогранники и фигуры вращения, векторы и координаты, элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся на базе основного общего среднего образования по всем специальностям. Оно может быть использовано учащимися старших классов общеобразовательных школ и преподавателями математики.

© Коллектив авторов, 2016

© Российский государственный университет правосудия, 2016

ISBN 978-5-93916-481-8

■ СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.	10
-------------------	----

Глава 1. Развитие понятия о числе

§ 1. Основные операции над множествами	13
§ 2. Замкнутость множеств.	15
§ 3. Числовые множества	18
I. Множество натуральных чисел N	18
II. Множество целых чисел Z	18
III. Множество рациональных чисел Q	19
IV. Множество иррациональных чисел J	20
V. Множество действительных чисел R	20
VI. Множество комплексных чисел C	21

Глава 2. Функции и их свойства

§ 1. Понятие функции и её основные свойства.	29
I. Понятие функции. Область определения и множество значений функции	29
II. Нули функции. Промежутки знакопостоянства функции	30
III. Четность функции	31
IV. Периодичность функции	32
V. Монотонность функции.	32
VI. Стационарные и критические точки функции.	33
VII. Точки экстремума и экстремумы функции	33
VIII. Выпуклость и точки перегиба графика функции	35
IX. Асимптоты	35
§ 2. Композиция функций и взаимно обратные функции.	36

Глава 3. Корни, степени и логарифмы

§ 1. Корень натуральной степени и его свойства	47
I. Квадратный корень	47
II. Корень n -ой степени	49
§ 2. Степень с действительным показателем и её свойства	54
I. Степень с рациональным показателем	54
II. Степень с действительным показателем	54
§ 3. Иррациональные уравнения и неравенства	59
I. Иррациональные уравнения	59
II. Иррациональные неравенства	61
§ 4. Логарифмы и их свойства	65
I. Понятие логарифма. Натуральный и десятичный логарифмы	65
II. Свойства логарифмов и основные формулы	66
§ 5. Показательная и логарифмическая функции, их графики и основные свойства	71
I. Показательная функция, её свойства и график	71
II. Логарифмическая функция, её свойства и график	71
§ 6. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства	75
I. Показательные уравнения	75
II. Показательные неравенства	77
III. Логарифмические уравнения	77
IV. Логарифмические неравенства	78

Глава 4. Основы тригонометрии

§ 1. Радианная мера угла	88
§ 2. Синус, косинус, тангенс и котангенс действительного числа	91
I. Основные определения	91
II. Знаки тригонометрических функций по четвертям	91
III. Связь между значениями тригонометрических функций чисел « α » и « $-\alpha$ »	92
§ 3. Основные формулы тригонометрии	97

I. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента	97
II. Формулы сложения	98
III. Формулы удвоенного аргумента	98
IV. Формулы понижения степени	99
V. Формулы половинного аргумента	99
VI. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму (разность)	99
VII. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение	100
VIII. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента (универсальная подстановка)	100
IX. Введение вспомогательного угла	101
X. Формулы приведения	102
§ 4. Тригонометрические функции, основные свойства и графики	110
I. Функция $y = \sin x$, её свойства и график	110
II. Функция $y = \cos x$, её свойства и график	111
III. Функция $y = \operatorname{tg} x$, её свойства и график	112
IV. Функция $y = \operatorname{ctg} x$, её свойства и график	114
§ 5. Обратные тригонометрические величины	121
I. Арксинус числа	121
II. Арккосинус числа	122
III. Арктангенс числа	122
IV. Арккотангенс числа	123
§ 6. Тригонометрические уравнения	128
I. Уравнение $\sin x = a$	128
II. Уравнение $\cos x = a$	129
III. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$	131
IV. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$	131
V. Примеры решения более сложных тригонометрических уравнений	132

Глава 5. Производная и её приложения

§ 1. Предел последовательности и предел функции	141
I. Последовательность	141
II. Предел последовательности и его свойства	142
III. Предел функции и его свойства	144
§ 2. Производная функции	146
I. Понятие производной	146
II. Таблица производных основных функций и правила дифференцирования	148
§ 3. Применение производной	151
I. Монотонность функции, стационарные и критические точки	151
II. Точки экстремума, экстремумы, промежутки выпуклости и точки перегиба	151
III. Схема исследования функции $y = f(x)$ и построение её графика	153
IV. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	157

Глава 6. Первообразная и её приложения

§ 1. Первообразная функции и неопределенный интеграл	168
§ 2. Определенный интеграл и его свойства	174
§ 3. Приложения определенного интеграла	175
I. Площадь криволинейной трапеции	175
II. Вычисление площадей фигур	176
III. Вычисление объемов тел	178
IV. Физические приложения определенного интеграла	181

Глава 7. Прямые и плоскости в пространстве

§ 1. Изображение пространственных фигур на плоскости	188
§ 2. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве	194
I. Основные аксиомы стереометрии и следствия из них	194
II. Взаимное расположение прямых	195

III. Взаимное расположение прямой и плоскости	196
IV. Взаимное расположение плоскостей	196
§ 3. Углы и расстояния в пространстве	202
I. Угол между прямыми	202
II. Угол между прямой и плоскостью	202
III. Расстояния в пространстве	204
IV. Угол между плоскостями. Двугранный угол	204
§ 4. Некоторые теоремы о параллельности и перпендикулярности в пространстве	205
Глава 8. Многогранники	
§ 1. Призма	215
I. Призма. Правильная призма	215
II. Параллелепипед. Куб... ..	216
III. Объём и площадь поверхности призмы, прямоугольного параллелепипеда и куба.	217
§ 2. Пирамида	222
I. Пирамида. Правильная пирамида	222
II. Усечённая пирамида	224
III. Объём и площадь поверхности пирамиды	225
§ 3. Правильные многогранники. Симметрия в пространстве	232
I. Правильные многогранники	232
II. Симметрия в пространстве	233
Глава 9. Фигуры (тела) вращения	
§ 1. Цилиндр	235
I. Цилиндр. Основные понятия	235
II. Объём и площадь поверхности цилиндра	236
§ 2. Конус	239
I. Конус. Основные понятия	239
II. Усечённый конус	240
III. Объём и площадь поверхности конуса	240
§ 3. Шар и сфера	243

I. Шар и сфера. Основные понятия	243
II. Объём и площадь поверхности шара	244
Глава 10. Векторы и координаты	
§ 1. Векторы	248
I. Векторы. Основные понятия. Правила действия с векторами	248
II. Компланарные векторы	249
III. Скалярное произведение векторов. Основные формулы	250
§ 2. Координаты в пространстве.	250
I. Прямоугольная система координат в пространстве	250
II. Правила действий с векторами в координатах. Основные формулы	251
Глава 11. Элементы комбинаторики	
§ 1. Основные методы и формулы комбинаторики	259
I. Перебор возможных вариантов	259
II. Логический метод	260
III. Основные комбинаторные конструкции: перестановки, размещения, сочетания	261
IV. Общая схема решения некоторых задач по комбинаторике (схема Гладковой Е. Б.)	264
§ 2. Бином Ньютона	271
I. Треугольник Паскаля	271
II. Бином Ньютона	272
§ 3. Правила сложения и умножения в комбинаторике	274
I. Правило сложения	274
II. Правило умножения	274
Глава 12. Элементы теории вероятностей и математической статистики	
§ 1. Основные понятия теории вероятностей	278
§ 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность	284

§ 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.....	291
§ 4. Формула Бернулли	294
§ 5. Статистика	297
Ответы	305
Приложение	333
Список использованной литературы.....	339
Список рекомендованной литературы	340

VII. Свойства равнобедренного треугольника

Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является также биссектрисой и высотой.

VIII. Свойство касательной

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

IX. Вписанные и описанные окружности

В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну.

Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

Список использованной литературы

1. *Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф.* Геометрия 10–11: Учеб. для общеобразоват. учреждений. — М.: Просвещение, 2011.
2. *Баврин И. И.* Высшая математика: Учебник для хим.-биол. спец. пед. вузов. — М.: Просвещение, 1993.
3. *Башмаков М. И.* Математика: Учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования. — М.: Издательский центр «Академия», 2012.
4. *Башмаков М. И.* Математика. Задачник: Учеб. пособие для учреждений нач. и сред. проф. образования. — М.: Издательский центр «Академия», 2012.
5. *Богомолов Н. В.* Сборник задач по математике: Учеб. пособие для ссузов. — М.: Дрофа, 2011.
6. *Богомолов Н. В., Салойленко П. И.* Математике: Учеб. для ссузов. — М.: Дрофа, 2012.
7. *Богомолов Н. В. Сергеев Л. Ю.* Сборник дидактических заданий по математике: Учеб. пособие для ссузов. — М.: Дрофа, 2011.
8. *Вернер А. Л., Карп А. П.* Математика: Учеб. пособие для 10 кл. гуманитар. профиля. — М.: Просвещение, 2002.
9. *Вернер А. Л., Карп А. П.* Математика: Учеб. пособие для 11 кл. гуманитар. профиля. — М.: Просвещение, 2002.
10. *Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбург С. И.* Алгебра и математический анализ для 10 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. — М.: Просвещение, 1992.
11. *Ермаков В. И., Бобрик Г. И.* и др. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие. — М.: ИНФРА-М, 2004.
12. *Звавич Л. И., Рязановский А. Р.* Алгебра в таблицах. 7–11 класс: Справочное пособие. — М.: Дрофа, 2013.
13. *Звавич Л. И., Рязановский А. Р.* Геометрия в таблицах. 7–11 класс: Справочное пособие. — М.: Дрофа, 2013.

14. Звавич Л. И., Рязановский А. Р., Такуш Е. В. Контрольные и проверочные работы. 10–11 класс: Методическое пособие. — М.: Дрофа, 2001.
15. Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Вейц Б. Е. и др. Учеб. пособие для 9–10 классов сред. шк. — М.: Просвещение, 1987.
16. Колмогоров А. Н., Абрамов А. И., Дудницын Ю. П. и др. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 классов общеобразоват. учреждений Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 2010.
17. Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л., Яковлев Г. Н. Математика: Учебное пособие: В 2 кн. — М.: РИА «Новая волна»: Издатель Умеренков, 2008.
18. Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Ткачева М. В. и др. Алгебра и начала математического анализа 10 класс: Учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень). — М.: Мнемозина, 2011.
19. Куланин Е. Д., Норин В. П., Федин С. Н. и др. 3000 конкурсных задач по математике. — М.: Айрис-пресс, 2005.
20. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г. Алгебра. Элементы статистики и теории вероятностей: Учебное пособие для учащихся 7–9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 2008.
21. Малыхин В. И. Математика в экономике: Учебное пособие. — М.: ИНФРА-М, 2002.
22. Мордкович А. Г., Денищева Л. О., Корешкова Т. А. и др. Алгебра и начала математического анализа, 10–11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Под ред. А. Г. Мордковича. — М.: Мнемозина, 2011.
23. Смирнова И. М. Устные упражнения по геометрии: учебное пособие для 10–11 классов. — М.: Просвещение, 2010.

Список рекомендованной литературы

1. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. Геометрия 10–11: Учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. — М.: Просвещение, 2011.
2. Башмаков М. И. Математика: Учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования. — М.: Издательский центр «Академия», 2012.

3. Башмаков М. И. Математика. Задачник: Учеб. пособие для учреждений нач. и сред. проф. образования. — М.: Издательский центр «Академия», 2012.
4. Башмаков М. И. Математика. Сборник задач профильной направленности: Учеб. пособие для учреждений нач. и сред. проф. образования. — М.: Издательский центр «Академия», 2012.
5. Звавич Л. И., Рязановский А. Р. Алгебра в таблицах. 7–11 класс: Справочное пособие. — М.: Дрофа, 2013.
6. Звавич Л. И., Рязановский А. Р. Геометрия в таблицах. 7–11 класс: Справочное пособие. — М.: Дрофа, 2013.
7. Колмогоров А. Н., Абрамов А. И., Дудницын Ю. П. и др. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 классов общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 2010.
8. Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л., Яковлев Г. Н. Математика: Учебное пособие: В 2 кн. — М.: РИА «Новая волна»: Издатель Умеренков, 2008.
9. Смирнова И. М. Геометрия: Учебник для 10–11 классов гуманитарного профиля. — М.: Мнемозина, 2007.

Учебное издание

Чернецов М. М., Карбачинская Н. Б.,
Лебедева Е. С., Харитонов Е. Е.

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Издание осуществлено в авторской редакции

Корректор В. В. Паламарчук
Верстка: А. А. Грач

Подписано в печать 12.09.2016. Формат 60×90 1/16.
Усл. печ. л. 21,5. Тираж 450 экз.

Российский государственный университет правосудия
117418, г. Москва, ул. Новочеремушкинская, д. 69