

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**М. Э. Абрамян**

**ЛЕКЦИИ  
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ  
ИСЧИСЛЕНИЮ ФУНКЦИЙ  
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Учебник  
для студентов физико-математических  
и технических специальностей

Ростов-на-Дону – Таганрог  
Издательство Южного федерального университета  
2020

УДК 517.4(075.8)

ББК 22.162я73

A164

*Печатается по решению учебно-методической комиссии  
Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича  
Южного федерального университета (протокол № 2 от 14 февраля 2020 г.)*

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика»  
Южно-Российского государственного политехнического университета,  
почетный работник высшего профессионального образования РФ,  
профессор *А. Э. Пасенчук*;

доктор физико-математических наук, зав. кафедрой информатики  
и вычислительного эксперимента Института математики, механики  
и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета,  
профессор *В. С. Пилиди*

**Абрамян, М. Э.**

A164 Лекции по дифференциальному исчислению функций одной  
переменной : учебник / М. Э. Абрамян ; Южный федеральный  
университет. — Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного  
федерального университета, 2020. — 228 с.

ISBN 978-5-9275-3495-1

Учебник содержит лекционный материал первого семестра курса по математическому анализу и включает такие темы, как предел последовательности, предел функции, непрерывные функции и дифференцируемые функции (вплоть до формулы Тейлора, правила Лопитала и исследования функций методами дифференциального исчисления). Особенностью книги является возможность ее изучения одновременно с просмотром набора из 22 видеолекций, записанных автором и доступных на сайте [youtube.com](https://www.youtube.com). Разделы и подразделы учебника снабжены сведениями о номере лекции, времени начала соответствующего фрагмента и длительности этого фрагмента. В электронном варианте учебника эти сведения оформлены в виде гиперссылок, позволяющих немедленно перейти к просмотру требуемого фрагмента лекции.

Учебник предназначен для студентов физико-математических и технических специальностей.

УДК 517.4(075.8)

ББК 22.162я73

ISBN 978-5-9275-3495-1

- © Южный федеральный университет, 2020
- © Абрамян М. Э., 2020
- © Оформление. Макет. Издательство Южного федерального университета, 2020

# Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	7
<b>Видеолекции</b> .....	10
Использование видеолекций .....	10
Использование субтитров .....	14
<b>Предварительные сведения</b> .....	15
Математическая логика .....	15
Множества .....	15
Кванторы .....	17
Абсолютная величина и целая часть вещественного числа .....	17
Принцип математической индукции .....	17
Отображения и функции .....	18
<b>1. Границы множеств</b> .....	20
Аксиома непрерывности множества вещественных чисел .....	20
Границы и точные границы числовых множеств .....	20
Арифметические операции над множествами .....	24
<b>2. Предел последовательности</b> .....	27
Окрестность и симметричная окрестность точки .....	27
Определение предела последовательности .....	28
Простейшие свойства предела последовательности .....	32
<b>3. Свойства предела последовательности</b> .....	34
Бесконечно малые последовательности: определение и свойства ...	34
Критерий сходимости последовательности в терминах бесконечно малых последовательностей .....	35
Арифметические свойства предела последовательности .....	35
Переход к пределу в неравенствах .....	38
<b>4. Бесконечные пределы</b> .....	41
Окрестности бесконечно удаленных точек .....	41
Бесконечно большие последовательности .....	41
Арифметические свойства бесконечно больших последовательностей .....	43

<b>5. Монотонные последовательности</b> .....	46
Ограниченные и монотонные последовательности: определения ...	46
Сходимость монотонных последовательностей .....	46
Примеры применения теоремы о сходимости монотонных последовательностей .....	48
<b>6. Теорема о вложенных сегментах     и теорема Больцано – Коши о предельной точке</b> .....	55
Теорема о вложенных сегментах .....	55
Предельные точки множества. Теорема Больцано – Коши .....	57
<b>7. Подпоследовательности. Критерий Коши</b> .....	60
Подпоследовательности. Теорема Больцано – Вейерштрасса .....	60
Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности .....	64
<b>8. Предел функции</b> .....	69
Определение и единственность предела функции .....	69
Критерий существования предела функции в терминах последовательностей .....	71
Примеры функций, имеющих и не имеющих пределы .....	73
Пределы функции в бесконечно удаленных точках и бесконечные пределы .....	75
<b>9. Свойства предела функции</b> .....	77
Предел функции и арифметические операции .....	77
Переход к пределу в неравенствах для функций .....	78
Теорема о пределе суперпозиции функций .....	79
<b>10. Односторонние пределы.     Некоторые важные пределы функций</b> .....	82
Определение односторонних пределов функций .....	82
Критерий существования предела функции в терминах односторонних пределов .....	83
Первый замечательный предел .....	85
Второй замечательный предел .....	88
<b>11. Пределы монотонных ограниченных функций.     Критерий Коши для функций</b> .....	91
Монотонные и ограниченные функции .....	91
Критерий Коши существования предела функции .....	93

<b>12. Непрерывность функции в точке</b> .....	97
Определение непрерывной функции в точке .....	97
Примеры непрерывных функций .....	98
Простейшие свойства непрерывных функций .....	99
Арифметические свойства непрерывных функций .....	100
Суперпозиция непрерывных функций .....	102
<b>13. Непрерывность функции на множестве</b> .....	107
Теорема о промежуточном значении .....	107
Теоремы Вейерштрасса о свойствах функций, непрерывных на сегменте .....	110
Равномерная непрерывность .....	114
<b>14. Точки разрыва</b> .....	119
Точки разрыва функций, их классификация и примеры .....	119
Точки разрыва монотонных функций .....	121
Критерий непрерывности монотонной функции .....	124
Теорема об обратной функции .....	125
<b>15. <i>O</i>-символика</b> .....	128
Функции, бесконечно малые по сравнению с другими функциями	128
Функции, ограниченные по сравнению с другими функциями	130
Некоторые свойства, связанные с <i>O</i> -символикой .....	131
Эквивалентные функции в точке .....	132
<b>16. Дифференцируемые функции</b> .....	135
Предварительные замечания и основные определения .....	135
Непрерывность дифференцируемой функции .....	137
Дифференциал функции .....	138
Производные некоторых элементарных функций .....	140
<b>17. Свойства дифференцируемых функций</b> .....	142
Арифметические свойства производных и дифференциалов .....	142
Дифференцирование суперпозиции .....	145
Дифференцирование обратной функции .....	149
<b>18. Гиперболические и обратные гиперболические функции</b>	153
Гиперболические функции и их свойства .....	153
Обратные гиперболические функции и их свойства .....	154

<b>19. Физический и геометрический смысл производной</b> .....	158
Физический смысл производной .....	158
Геометрический смысл производной .....	159
<b>20. Производные высших порядков</b> .....	162
Производные высших порядков: определение и примеры .....	162
Производные высших порядков для суммы и произведения функций .....	164
Число сочетаний: определение и свойства .....	165
Формула Лейбница дифференцирования произведения .....	167
<b>21. Основные теоремы дифференциального исчисления</b> ....	170
Локальные экстремумы функций. Теорема Ферма .....	170
Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши .....	172
<b>22. Формула Тейлора</b> .....	179
Формула Тейлора для многочленов и произвольных дифференцируемых функций .....	179
Различные представления остаточного члена в формуле Тейлора	183
Разложение элементарных функций по формуле Тейлора в окрестности нуля .....	188
<b>23. Правило Лопиталья</b> .....	193
Формулировка и доказательство правила Лопиталья .....	193
Примеры применения правила Лопиталья .....	197
Дополнение. Пример дифференцируемой функции, производная которой не является непрерывной .....	198
<b>24. Применение дифференциального исчисления     к исследованию функций</b> .....	201
Локальные экстремумы функций .....	201
Выпуклые функции .....	204
Точки перегиба функции .....	208
Расположение графика функции относительно касательной .....	212
Асимптоты .....	215
Пример исследования функции .....	217
<b>Литература</b> .....	221
<b>Указатель</b> .....	223