

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М. Э. Абрамян

**ЛЕКЦИИ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ
ИСЧИСЛЕНИЮ ФУНКЦИЙ
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Учебник
для студентов физико-математических
и технических специальностей

Ростов-на-Дону – Таганрог
Издательство Южного федерального университета
2020

УДК 517.4(075.8)

ББК 22.162я73

A164

*Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Южного федерального университета (протокол № 2 от 14 февраля 2020 г.)*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика»
Южно-Российского государственного политехнического университета,
почетный работник высшего профессионального образования РФ,
профессор *А. Э. Пасенчук*;

доктор физико-математических наук, зав. кафедрой информатики
и вычислительного эксперимента Института математики, механики
и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета,
профессор *В. С. Пилиди*

Абрамян, М. Э.

A164 Лекции по дифференциальному исчислению функций одной
переменной : учебник / М. Э. Абрамян ; Южный федеральный
университет. — Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного
федерального университета, 2020. — 228 с.

ISBN 978-5-9275-3495-1

Учебник содержит лекционный материал первого семестра курса по математическому анализу и включает такие темы, как предел последовательности, предел функции, непрерывные функции и дифференцируемые функции (вплоть до формулы Тейлора, правила Лопиталя и исследования функций методами дифференциального исчисления). Особенностью книги является возможность ее изучения одновременно с просмотром набора из 22 видеолекций, записанных автором и доступных на сайте youtube.com. Разделы и подразделы учебника снабжены сведениями о номере лекции, времени начала соответствующего фрагмента и длительности этого фрагмента. В электронном варианте учебника эти сведения оформлены в виде гиперссылок, позволяющих немедленно перейти к просмотру требуемого фрагмента лекции.

Учебник предназначен для студентов физико-математических и технических специальностей.

УДК 517.4(075.8)

ББК 22.162я73

ISBN 978-5-9275-3495-1

© Южный федеральный университет, 2020

© Абрамян М. Э., 2020

© Оформление. Макет. Издательство

Южного федерального университета, 2020

Оглавление

Предисловие	7
Видеолекции	10
Использование видеолекций	10
Использование субтитров	14
Предварительные сведения	15
Математическая логика	15
Множества	15
Кванторы	17
Абсолютная величина и целая часть вещественного числа	17
Принцип математической индукции	17
Отображения и функции	18
1. Границы множеств	20
Аксиома непрерывности множества вещественных чисел	20
Границы и точные границы числовых множеств	20
Арифметические операции над множествами	24
2. Предел последовательности	27
Окрестность и симметричная окрестность точки	27
Определение предела последовательности	28
Простейшие свойства предела последовательности	32
3. Свойства предела последовательности	34
Бесконечно малые последовательности: определение и свойства	34
Критерий сходимости последовательности в терминах бесконечно малых последовательностей	35
Арифметические свойства предела последовательности	35
Переход к пределу в неравенствах	38
4. Бесконечные пределы	41
Окрестности бесконечно удаленных точек	41
Бесконечно большие последовательности	41
Арифметические свойства бесконечно больших последовательностей	43

5. Монотонные последовательности	46
Ограниченные и монотонные последовательности: определения	46
Сходимость монотонных последовательностей	46
Примеры применения теоремы о сходимости монотонных последовательностей	48
6. Теорема о вложенных сегментах и теорема Больцано – Коши о предельной точке	55
Теорема о вложенных сегментах	55
Предельные точки множества. Теорема Больцано – Коши	57
7. Подпоследовательности. Критерий Коши	60
Подпоследовательности. Теорема Больцано – Вейерштрасса	60
Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности	64
8. Предел функции	69
Определение и единственность предела функции	69
Критерий существования предела функции в терминах последовательностей	71
Примеры функций, имеющих и не имеющих пределы	73
Пределы функции в бесконечно удаленных точках и бесконечные пределы	75
9. Свойства предела функции	77
Предел функции и арифметические операции	77
Переход к пределу в неравенствах для функций	78
Теорема о пределе суперпозиции функций	79
10. Односторонние пределы. Некоторые важные пределы функций	82
Определение односторонних пределов функций	82
Критерий существования предела функции в терминах односторонних пределов	83
Первый замечательный предел	85
Второй замечательный предел	88
11. Пределы монотонных ограниченных функций. Критерий Коши для функций	91
Монотонные и ограниченные функции	91
Критерий Коши существования предела функции	93

12. Непрерывность функции в точке	97
Определение непрерывной функции в точке	97
Примеры непрерывных функций	98
Простейшие свойства непрерывных функций	99
Арифметические свойства непрерывных функций	100
Суперпозиция непрерывных функций	102
13. Непрерывность функции на множестве	107
Теорема о промежуточном значении	107
Теоремы Вейерштрасса о свойствах функций, непрерывных на сегменте	110
Равномерная непрерывность	114
14. Точки разрыва	119
Точки разрыва функций, их классификация и примеры	119
Точки разрыва монотонных функций	121
Критерий непрерывности монотонной функции	124
Теорема об обратной функции	125
15. <i>O</i>-символика	128
Функции, бесконечно малые по сравнению с другими функциями	128
Функции, ограниченные по сравнению с другими функциями	130
Некоторые свойства, связанные с <i>O</i> -символикой	131
Эквивалентные функции в точке	132
16. Дифференцируемые функции	135
Предварительные замечания и основные определения	135
Непрерывность дифференцируемой функции	137
Дифференциал функции	138
Производные некоторых элементарных функций	140
17. Свойства дифференцируемых функций	142
Арифметические свойства производных и дифференциалов	142
Дифференцирование суперпозиции	145
Дифференцирование обратной функции	149
18. Гиперболические и обратные гиперболические функции	153
Гиперболические функции и их свойства	153
Обратные гиперболические функции и их свойства	154

19. Физический и геометрический смысл производной	158
Физический смысл производной	158
Геометрический смысл производной	159
20. Производные высших порядков	162
Производные высших порядков: определение и примеры	162
Производные высших порядков для суммы и произведения функций	164
Число сочетаний: определение и свойства	165
Формула Лейбница дифференцирования произведения	167
21. Основные теоремы дифференциального исчисления	170
Локальные экстремумы функций. Теорема Ферма	170
Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши	172
22. Формула Тейлора	179
Формула Тейлора для многочленов и произвольных дифференцируемых функций	179
Различные представления остаточного члена в формуле Тейлора	183
Разложение элементарных функций по формуле Тейлора в окрестности нуля	188
23. Правило Лопиталья	193
Формулировка и доказательство правила Лопиталья	193
Примеры применения правила Лопиталья	197
Дополнение. Пример дифференцируемой функции, производная которой не является непрерывной	198
24. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций	201
Локальные экстремумы функций	201
Выпуклые функции	204
Точки перегиба функции	208
Расположение графика функции относительно касательной	212
Асимптоты	215
Пример исследования функции	217
Литература	221
Указатель	223