

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Д. Б. Рохлин**

# **ОСНОВЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

*Учебное пособие*

Ростов-на-Дону – Таганрог  
Издательство Южного федерального университета  
2019

УДК 519.216(075.8)

ББК 22.171 я 73

Р79

*Печатается по решению  
кафедры высшей математики и исследования операций  
Института математики, механики и компьютерных наук  
им. И. И. Воровича Южного федерального университета  
(протокол №7 от 12 марта 2019 г.)*

**Рецензенты:**

доктор технический наук, профессор А. Б. Усов;  
доктор физико-математических наук, профессор И. В. Павлов

**Рохлин, Д. Б.**

Р79 Основы стохастического анализа : учебное пособие / Д. Б. Рохлин ;  
Южный Федеральный университет. — Ростов-на-Дону ; Таганрог :  
Издательство Южного федерального университета, 2019. — 190 с.  
ISBN 978-5-9275-3132-5

В данном пособии, которое является кратким введением в стохастический анализ, отражены основы современной теории вероятностей, теории мартингалов и марковских процессов, стохастического исчисления, а также рассмотрена модель Блэка-Шоулза.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 519.216(075.8)

ББК 22.171 я 73

ISBN 978-5-9275-3132-5

© Южный федеральный университет, 2019

© Рохлин Д. Б., 2019

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Список обозначений</b>	<b>8</b>
<b>1 Основы современной теории вероятностей</b>	<b>10</b>
§ 1.1 Модель вероятностного эксперимента, условные вероятности . . . . .	10
§ 1.2 Случайные величины, интегрирование, характеристические функции .	15
§ 1.3 Сходимость случайных величин . . . . .	27
§ 1.4 Условное математическое ожидание . . . . .	32
§ 1.5 Метод Монте-Карло . . . . .	41
§ 1.6 Упражнения . . . . .	44
<b>2 Мартингалы и марковские процессы</b>	<b>50</b>
§ 2.1 Мартингалы с дискретным временем . . . . .	51
§ 2.2 Мартингалы с непрерывным временем . . . . .	69
§ 2.3 Марковские процессы: общие определения . . . . .	86
§ 2.4 Фундаментальное уравнение для марковских процессов с дискретным временем . . . . .	94
§ 2.5 Броуновское движение и гармонические функции . . . . .	102
§ 2.6 Упражнения . . . . .	106
<b>3 Стохастическое исчисление</b>	<b>112</b>
§ 3.1 Процессы ограниченной вариации и семимартингалы . . . . .	113
§ 3.2 Конструкция и свойства стохастического интеграла . . . . .	118
§ 3.3 Квадратическая вариация и квадратическая ковариация . . . . .	124
§ 3.4 Расширение класса интеграндов . . . . .	134
§ 3.5 Формула Ито . . . . .	137
§ 3.6 Вероятностные представления решений уравнений Пуассона и тепло- проводности . . . . .	141
§ 3.7 Стохастические дифференциальные уравнения, стохастическая экспо- нента . . . . .	145

§ 3.8 Вероятностные представления решений параболических уравнений с переменными коэффициентами . . . . .	148
§ 3.9 Теорема Гирсанова . . . . .	151
§ 3.10 Упражнения . . . . .	156
<b>4 Модель Блэка-Шоулза . . . . .</b>	<b>162</b>
§ 4.1 Самофинансируемые портфели . . . . .	162
§ 4.2 Арбитраж и мартингальные меры . . . . .	165
§ 4.3 Цены европейских опционов . . . . .	168
§ 4.4 Оптимальное инвестирование: мартингальный подход . . . . .	175
§ 4.5 Оптимальное инвестирование: уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана . . . . .	180
§ 4.6 Упражнения . . . . .	184
<b>Литература . . . . .</b>	<b>186</b>