Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра теоретической информатики

В. С. Рублев

Элементы теории графов. Деревья, сети

(*индивидуальные работы № 8 и 9 по дисциплине*

«Основы дискретной математики»)

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по
специальности Информационные технологии

Ярославль 2010

УДК 519.2
ББК В127я73
Р82

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009/10 года

Рецензент
кафедра теоретической информатики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Рублев, В. С. Элементы теории графов. Деревья, сети:
Р82 метод. указания / В. С. Рублев; Яросл. гос. ун-т. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2010. – 80 с.

Методические указания содержат варианты индивидуальных заданий по темам “Деревья”, “Потоки в сетях”, “Сети из функциональных элементов” дисциплины “Основы дискретной математики”, а также необходимый материал для ее самостоятельного изучения и выполнения индивидуальных заданий. Для качественного усвоения курса в издании даны подробные определения, примеры, иллюстрации и обоснования.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 010400.62 Информационные технологии (дисциплина “Основы дискретной математики”, блок ОП), очной формы обучения.

УДК 519.2
ББК В127я73

1 Деревья

1.1 Определение деревьев и их свойства

Деревом *называется связный граф, не содержащий циклов.*

Примеры деревьев с числом вершин n от 1 до 4 изображены на рис. 1.

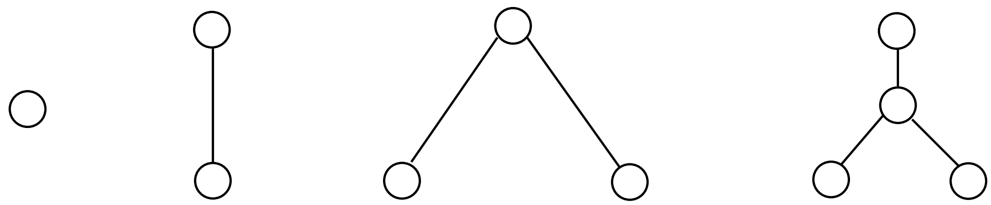

Рис. 1

Дерево можно изобразить как иерархическую схему следующим образом:

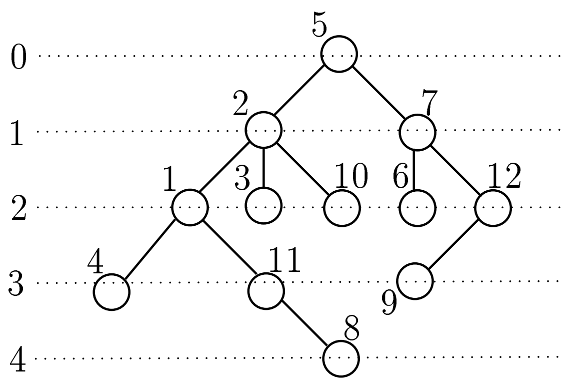

Рис. 2

1) все вершины располагаются на нескольких уровнях с номерами 0, 1,. . . ;

2) на уровне 0 (самом высоком) находится только 1 вершина – она называется *корнем* дерева;

3) на уровне 1 находятся все вершины, смежные с вершиной уровня 0;

4) на каждом следующем уровне с номером $k = 2, 3, \ldots$ находятся все вершины, смежные с вершинами уровня $k-1$, которые не находятся уже на уровне $k-2$;

5) каждое ребро соединяет вершины двух соседних уровней.

На рис. 2 приведен пример иерархической схемы для дерева D с 12 вершинами, заданного следующим списком ребер:
$\{\{1,2\},\{1,4\},\{1,11\},\{2,3\},\{2,5\},\{2,10\},\{5,7\},\{6,7\},\{7,12\},\{8,11\},\{9,12\}\}$.

Отметим, что в качестве корня можно выбрать любую вершину дерева. Такое дерево с выделенной в качестве корня вершиной называется *корневым деревом.* В корневом дереве каждая вершина, кроме корня, смежна лишь с одной вершиной, находящейся на более высоком уровне (с номером на 1 меньше), которая называется *отцом* этой вершины. Для каждой вершины определяется единственный маршрут, связывающий ее с корнем дерева. Поэтому вершины корневого дерева, находящиеся на одном уровне, не смежны между собой (предположение противного приводит к циклу, который состоит из ребра между ними и маршрутов, связывающих эти вершины с корнем). Все вершины, имеющие одного и того же *отца*, называются его *сыновьями.* Вершины, имеющие одного и того же *отца*, называются *братьями*[1]. Вершины, не имеющие *сыновей*, называются *листьями* или *висячими вершинами.* Для каждой вершины дерева x, не являющейся *листом*, часть графа, образованная этой вершиной и всеми вершинами, которые связаны с корнем через эту вершину, является *поддеревом.* В этом *поддереве* вершина x играет роль корня, а *поддеревья* вершины x, образованные *сыновьями* вершины x, называются *ветвями*, выходящими из вершины x. В целом термины *корень, ветви, листья* идут от схожести с деревом-растением, если перевернуть иерархическую схему.

Свойства деревьев:

1. Маршрут, связывающий любые 2 вершины дерева, является простой цепью, так как в предположении, что есть еще один маршрут, мы приходим к циклу, которого не может существовать в дереве.

2. Количество n вершин и количество m ребер дерева связаны соотношением:
$$m = n - 1.$$

[1] Иногда применяется терминология *мать, дочь, сестра.*

Это равенство следует из того факта, что каждое ребро дерева связывает некоторую вершину дерева с ее *отцом*, и так как для каждой вершины дерева, кроме корня, отец единственный, то между множеством вершин без корня и множеством ребер устанавливается 1-1с.

3. Связный граф, имеющий $n - 1$ ребро, является деревом. Действительно, в предположении, что этот связный граф не является деревом, он имеет цикл, и из этого цикла можно исключить, по крайней мере, 1 ребро так, что он останется связным. Будем исключать такие ребра до тех пор, пока все циклы не исчезнут, но граф останется связным. Тогда это будет дерево, имеющее число ребер меньше, чем $n - 1$, что противоречит предыдущему свойству дерева.

4. Добавление любого ребра к дереву приводит к циклу с этим ребром, что также следует из свойства 2 (а также следует из свойства 1, так как появляется второй маршрут, связывающий концы добавленного ребра).

Для ориентированных корневых деревьев применяют 2 способа ориентации:
1) от *отцов* к *сыновьям* и
2) от *сыновей* к *отцам*.

1.2 Способы задания деревьев

Кроме описанных ранее способов задания графа (список ребер, матрица смежности вершин, матрица инцидентности вершин и ребер) применяют еще 2 специфических для деревьев способа:

1. *Список отцов* – для каждой вершины с номером $i = 1, \ldots, n$ на i-м месте в списке находится номер *отца* этой вершины, если она не является корнем дерева, или 0 для корня дерева.
   Так, в вышеописанном примере дерева, заданного списком ребер, список отцов будет выглядеть следующим образом:
$$(2, 5, 2, 1, 0, 7, 5, 11, 12, 2, 1, 7).$$