

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. И. Мармо,
М. В. Фролов

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть I

Учебное пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

Содержание

| | |
|--|-----------|
| 1. Математические методы электродинамики | 4 |
| 1.1. Векторная алгебра | 4 |
| 1.2. Векторный анализ | 6 |
| 1.3. Криволинейные координаты | 14 |
| 2. Постоянное электрическое поле | 24 |
| 3. Постоянное магнитное поле | 41 |
| Приложение | 58 |
| 1. Основные дифференциальные операции в сферических и цилиндрических координатах | 58 |
| 2. Сферические функции | 59 |
| 3. Полиномы Лежандра | 61 |
| Литературы | 62 |

Векторы, преобразующиеся по правилу (1.1) при поворотах, могут двояко вести себя при инверсии системы координат, т.е. при преобразовании вида

$$x'_i = -x_i, \quad (1.2)$$

где матрица преобразования $\alpha_{ij} = -\delta_{ij}$. Те векторы, компоненты которых, как и x_i , меняют знак при инверсии, называются *истинными* или *полярными*. Векторы, компоненты которых при инверсии координат не изменяют знака, называются *псевдовекторами* или *аксиальными* векторами (угловая скорость вращения, векторное произведение $[\mathbf{ab}]$ двух полярных векторов и др.).

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Вычислить: а) векторное произведение $[\mathbf{ab}]$; б) смешанное произведение $(\mathbf{a}[\mathbf{ba}])$; в) угол между \mathbf{a} и \mathbf{b} , если $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.

1.2. Найти единичный вектор, направленный вдоль вектора $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, где $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

1.3. Найти проекцию вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ на вектор $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

1.4. Доказать равенство $(\mathbf{ab})^2 + [\mathbf{ab}]^2 = a^2b^2$.

1.5. Какому условию должны удовлетворять векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , чтобы векторы $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ были а) ортогональны; б) коллинеарны?

1.6. Даны векторы $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Определить, какие из них взаимно перпендикулярны, а какие параллельны или антипараллельны.

1.7. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

1.8. Известны векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} . Представить вектор \mathbf{A} в виде суммы двух векторов: \mathbf{A}_{\parallel} — параллельного и \mathbf{A}_{\perp} — перпендикулярного к \mathbf{B} .

1.2. Векторный анализ

Основные дифференциальные операции. Если любой точке пространства (или части пространства) ставится в соответствие некоторая величина, то говорят, что в пространстве задано поле этой величины. Если любой точке пространства ставится в соответствие число, то поле называется скалярным; если любой точке пространства ставится в соответствие вектор, то поле называется векторным.

С формальной точки зрения поле есть функция точки. Пусть задано скалярное поле: $f = f(\mathbf{r})$. Если в пространстве выбрана некоторая декартова система координат, то можем написать: $f = f(x, y, z)$. Возьмем в пространстве некоторую точку M . Из нее можно выходить по всевозможным

направлениям. Выберем некоторое направление l (рис. 1). Производной f по направлению l называется скорость изменения поля в данном направлении:

$$\frac{df}{dl} = \lim_{N \rightarrow M} \frac{f(N) - f(M)}{MN}.$$

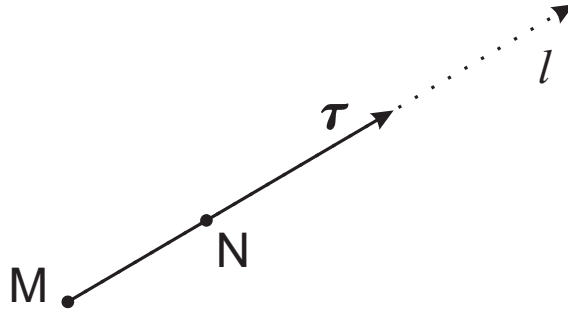


Рис. 1

На заданном направлении l координаты x, y, z являются функциями расстояния l , $f = f(x(l), y(l), z(l))$, поэтому f можно продифференцировать как сложную функцию:

$$\frac{df}{dl} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dl}.$$

Представим последнее выражение как скалярное произведение двух векторов:

$$\frac{df}{dl} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) \left(\frac{dx}{dl} \mathbf{i} + \frac{dy}{dl} \mathbf{j} + \frac{dz}{dl} \mathbf{k} \right).$$

Первый вектор здесь называется *градиентом* поля f :

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1.3)$$

Второй вектор

$$\frac{dx}{dl} \mathbf{i} + \frac{dy}{dl} \mathbf{j} + \frac{dz}{dl} \mathbf{k} = \frac{d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \boldsymbol{\tau}$$

есть единичный вектор направления l . Таким образом,

$$\frac{df}{dl} = (\text{grad } f \cdot \boldsymbol{\tau}). \quad (1.4)$$

Из последнего выражения следует, что вектор $\text{grad } f$ в точке M указывает в сторону наиболее быстрого возрастания поля f , причем эта наибольшая скорость равна $|\text{grad } f|$. Из этого утверждения, которое составляет

геометрический смысл градиента, ясно, что градиент инвариантно связан с рассматриваемым полем, т.е. остается неизменным при замене декартовых осей (этого не видно из определения (1.3), данного в неинвариантной форме, «привязанной» к какой-то системе координат). Итак, градиент скалярного поля образует векторное поле.

Если ввести векторный дифференциальный оператор ∇ («набла»)

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{или} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (1.5)$$

то можно записать (1.3) в виде

$$\text{grad } f = \nabla f,$$

а (1.4) в виде

$$\frac{df}{dl} = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla f) = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) f.$$

Рассмотрим частный случай сферически симметричной функции f (т.е. функции, которая зависит только от расстояния $r = |\mathbf{r}|$ до начала координат).

Пример 1.1. Показать, что

$$\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.6)$$

Решение. Воспользуемся выражением для градиента в д.с.к. (1.3). Выразим $r = |\mathbf{r}|$ через x, y, z ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) и вычислим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{x}{r}.$$

Аналогично $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dr} \frac{y}{r}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dr} \frac{z}{r}$, откуда

$$\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad \blacktriangleleft \quad (1.7)$$

Рассмотрим теперь векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ и введем операцию дивергенции. Составим отношение потока поля \mathbf{a} через замкнутую поверхность S к объему области, ограниченному этой поверхностью:

$$\frac{\oint \mathbf{a} d\mathbf{S}}{V}.$$