Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

С. И. Яблокова

ВВЕДЕНИЕ В БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям
Математика и Компьютерная безопасность

ЯРОСЛАВЛЬ 2009

Ц. Яблокова. Введение в быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов

УДК 519.725
ББК 3811.3я73
Я 14

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009/10 года

Рецензенты:
кафедра алгебры ЯГПУ им. К. Д. Ушинского;
кандидат физ.-мат. наук, доцент ЯГТУ Е. Р. Матвеев

Яблокова, С. И. Введение в быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов:
Я 14 учебное пособие / С. И. Яблокова; Яросл. гос. ун-т. им. П. Г. Демидова.– Ярославль: ЯрГУ, 2009.– 136 с.
ISBN 978-5-8397-0685-9

Учебное пособие составлено в соответствии с программой курса "Прикладная алгебра (Быстрые алгоритмы)". Рассматриваются основные преобразования, используемые в цифровой обработке сигналов, и быстрые алгоритмы их вычисления. Пособие содержит большое количество примеров построения быстрых алгоритмов вычисления линейных и циклических сверток и дискретного преобразования Фурье.

Издание предназначено для студентов четвертого курса, обучающихся по специальностям 010100.62, 010101.65 Математика, и студентов второго курса, обучающихся по специальности 090102.65 Компьютерная безопасность (дисциплины "Прикладная алгебра", "Алгебраическая алгоритмика" (блоки СД, ОПД)), очной формы обучения.

Библиогр. : 4 назв.

УДК 519.725
ББК 3811.3я73

ISBN 978-5-8397-0685-9

Учебное издание
Яблокова Светлана Ивановна
Введение
в быстрые алгоритмы
цифровой обработки сигналов
Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерный набор, верстка С. И. Яблокова

Подписано в печать 27.10.2009 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага тип.
Усл. печ. л. 15,81. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 100 экз. Заказ 589

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Отпечатано ООО "Ремдер" ЛР ИД *N* 06151 от 26.10.01.
г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37
тел. (4852) 73 - 35 - 03, 58 - 03 - 48,
факс 58 - 03 - 49

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит лекции по курсу "Прикладная алгебра (Быстрые алгоритмы)", изучаемому студентами специальности "Математика" в 8 семестре. Часть этого материала излагается также студентам специальности "Компьютерная безопасность" в 3 семестре в рамках курса "Алгебраическая алгоритмика".

Пособие включает в себя материал, связанный с основными преобразованиями, используемыми в цифровой обработке сигналов: линейными и циклическими свертками и дискретным преобразованием Фурье. Связь между циклической сверткой и дискретным преобразованием Фурье дается теоремой о свертке (§ 8). Быстрое вычисление сверток представлено алгоритмом Кука – Тоома и алгоритмом Винограда для малых длин. Кроме того, в § 24 рассмотрен метод Агарвала – Кули вычисления свертки, сводящий одномерную циклическую свертку непростой длины в двумерную. Методы быстрого преобразования Фурье представлены алгоритмами Кули – Тьюки, в том числе для длин, являющихся степенями двойки и четверки, алгоритмом Гуда – Томаса, а также алгоритмом Рейдера, сводящим дискретное преобразование Фурье к циклической свертке. На основе алгоритмов Рейдера и Винограда для сверток получается БПФ-алгоритм Винограда.

В параграфах 21 – 23 рассматриваются быстрые алгоритмы свертки и дискретного преобразования Фурье в конечных полях, в частности, числовые преобразования Фурье и Мерсенна.

В заключение (§ 25) доказываются теоремы, дающие нижнюю оценку сложности алгоритмов вычисления свертки.

ИСТОРИЯ БЫСТРЫХ АЛГОРИТМОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Цифровая обработка сигналов сейчас переживает бурное развитие. Ее активно используют в различных областях человеческой деятельности. Сейсмография, радиолокация, связь, радиоастрономия, медицинская электроника используют последние достижения в области цифровой обработки сигналов. Разрабатываются и активно используются цифровые процессоры – специализированные цифровые компьютеры для обработки сигналов.

С точки зрения математики развитие быстрых алгоритмов цифровой обработки сигналов также является важным шагом в дальнейшем развитии такой, к примеру, ее области, как теория чисел. Во все времена большие числа, и особенно большие простые числа, интересовали людей – и математиков, и нематематиков. Математики искали новые и новые простые числа, которые становились очень большими. Нахождение таких чисел являлось все более трудной задачей. Даже появление быстродействующих вычислительных машин помогло в решении этой задачи лишь отчасти. Действительно, например, простейший тест простоты при помощи последовательных делений числа с 200 десятичными цифрами требует (при использовании машины, работающей со скоростью 10^6 операций в секунду) примерно 10^{86} лет вычислений! Можно, конечно, постараться повысить быстродействие компьютера от 10^6 операций в секунду, например, до $5 \cdot 10^6$ операций в секунду, но гораздо разумнее так организовать вычисления, чтобы имеющегося быстродействия компьютера оказалось достаточно. Именно разработкой таких алгоритмов вычисления и занимается область математики, которую называют быстрыми алгоритмами цифровой обработки сигналов.

Историю быстрых алгоритмов обработки сигналов принято отсчитывать с того момента, когда в 1965 году Кули и Тьюки опубликовали быстрый алгоритм вычисления дискретного преобразования Фурье (БПФ-алгоритм). На самом деле эта история началась раньше, когда в 1947 году Левинсон опубликовал свой эффективный метод решения некоторых теплицевых систем уравнений. С тех пор этот алгоритм широко используется при обработке сейсмических данных. Долгое время литература, посвященная алгоритму Левинсона, не пересекалась с литературой по быстрым алгоритмам преобразования Фурье. Первый БПФ-алгоритм был разработан Гудом (1960 г.) и Томасом (1963 г.). Публикация Гуда – Томаса прошла незамеченной. Алгоритм же Кули – Тьюки появился, как говорят, в нужный момент и послужил катализатором применения медота цифровой обработки сигналов в новом контексте. Дело в том, что после опубликования этого алгоритма Стогхэм заметил, что БПФ-алгоритмы могут служить удобным способом вычисления сверток. В силу множества возможных приложений алгоритм Кули – Тьюки и получил широкую известность. Позже Виноград (1976, 1978 гг.) опубликовал свой более эффективный, хотя и более сложный БПФ-алгоритм, который позволяет глубже понять, что в действительности означает процесс вычисления дискретного преобразования Фурье.

Различные вариации БПФ-алгоритма Кули – Тьюки появились позднее в работах других математиков. Сейчас существуют хорошие БПФ-алгоритмы практически для произвольной длины блока данных, а не только для блока длины, равной степени двойки, как в исходном алгоритме Кули – Тьюки. Та же идея используется, к примеру, для построения многолучевой плоско-фазированной радиолокационной антенны и известна под названием матрицы Батлера.

Для малых длин блоков быстрые алгоритмы сверток были впервые построены Агарвалом и Кули (1977 г.) с использованием остроумных догадок, но без использования общего универсального метода. Общий же метод построения быстрых алгоритмов свертки описал Виноград в 1978 году, доказав при этом важные теоремы несуществования лучших алгоритмов свертки для полей вещественных и комплексных чисел. Агарвал и Кули также указали основанный на китайской теореме об остатках метод разбиения задачи вычисления длинных сверток на задачи вычисления коротких сверток. Этот метод, объединяемый с методом Винограда, дает очень хорошие результаты для вычисления коротких сверток.

Разработка эффективных быстрых алгоритмов стала возможной также благодаря работам таких математиков, как Поллард, Штрассен, Рейдер и многих других.

В настоящее время для проведения вычислений широко используются сверхбольшие интегральные схемы, называемые чипами. Чип может содержать порядка 100000 логических элементов. Иногда выбор алгоритма позволяет существенно улучшить характеристики чипа. Используя быстрый алгоритм, можно реализовать улучшение характеристик чипа, для чего конструктор чипа должен перенести архитектуру алгоритма в архитектуру чипа. Разработка оптимальных конструкций в эпоху больших интегральных схем невозможна без понимания быстрых алгоритмов, лежащих в основе этой архитектуры. Большие цифровые процессоры часто сами создают потребность в разработке быстрых алгоритмов, поскольку размерность решаемых на них задач растет. Будет ли процессорное время алгоритма, предназначенного для решения некоторой задачи, пропорционально n^2 или n^3, несущественно при малом n, но при n, равном 10^3, это становится критичным.

Быстрые алгоритмы, рассматриваемые в данном пособии, связаны с цифровой обработкой сигналов, и их приложения столь же широки, сколь и приложения самой цифровой обработки сигналов. Мы сейчас даже не можем угадать масштабы будущих приложений цифровой обработки сигналов, но несложно предвидеть приложения, в которых объем необходимых вычислений будет на несколько порядков больше, чем тот, обработку которого может обеспечить современная технология вычислений.

Системы звуковой локации в наше время стали почти полностью цифровыми. Эти системы выполняют десятки миллионов или сотни миллионов умножений в секунду и еще больше сложений. Они уже сейчас требуют мощного цифрового оборудования.

Радиолокационные системы тоже становятся цифровыми. В принципе они очень похожи на системы звуковой локации, отличаясь тем, что используемая полоса частот их работы в 1000 и более раз больше, чем у звуковой локации.

Цифровая обработка сейсмической информации является главным методом разведки земных недр, в частности, одним из важнейших методов поиска залежей нефти.

Компьютерная томография широко используется в медицине. Это способ объемного синтеза изображений внутренних органов человека с помощью множественных проекций, получаемых при просвечивании рентгеновскими лучами. Разрабатываются алгоритмы, позволяющие существенно снизить дозы облучения, но требования к цифровой обработке намного превосходят те, что возможно реализовать в настоящее время.

Неразрушающий контроль качества продукции возможен с помощью воссоздания на компьютере изображений внутренних областей изделия по результатам эхолокации.

Обработка сигналов может быть использована при улучшении качества плохих фотографий, смазанных движением камеры или расфокусировкой. Такая цифровая обработка требует очень большого объема вычислений.

Обработка на цифровом процессоре спутниковых фотографий позволяет совместить несколько изображений, или выделить особенности, или скомбинировать полученную на различных длинах волн информацию, или создать синтетический стереоскопический образ. Так, в метеорологических исследованиях можно создать подвижное трехмерное изображение облачного покрова, движущегося над поверхностью земли, используя для этого последовательность спутниковых фотографий, снятых с нескольких точек.

Цифровые телефоны, цифровые видеокамеры, цифровое телевидение прочно вошли в современную жизнь. Потребность использования быстрых алгоритмов для цифровой обработки сигналов продолжает расти.

Каждое из описанных выше приложений связано с большим количеством вычислений, структура которых довольно прозрачна и сильно упорядочена. Это и позволяет создавать эффективные вычислительные алгоритмы для их решения.

Для оценки эффективности алгоритма обычно используют число необходимых умножений и сложений. Эти вычислительные характеристики и являются для нас главными критериями, описывающими сложность вычислительного устройства. На более низком уровне эта сложность описывается площадью чипа или числом логических элементов на нем и временем, необходимым для проведения вычислений. Мы не будем здесь пытаться оценивать характеристики на этом уровне, так как это выходит за рамки разработчика алгоритмов и относится к техническим вопросам конструкции чипа.