МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”
(ФГБОУ ВПО «ВГУ»)

Монотонные нелинейные операторы

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:

Ю.Б. Савченко

Воронеж

2014

1. Монотонные операторы

Л е м м а 1. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на* $E^1 = (-\infty, +\infty)$, *со значениями в* E^1. *Если*

$$(x-y)[f(x)-f(y)] \geq 0, \tag{1.1}$$

$$xf(x) \to \infty \text{ при } |x| \to \infty, \tag{1.2}$$

то уравнение

$$f(x) = 0 \tag{1.3}$$

имеет решение. Если условие (1.1) выполнено в усиленном смысле :

$$[f(x)-f(y)](x-y) > 0 \quad \text{при } x \neq y. \tag{1.4}$$

То уравнение (1.3) имеет при $x > y$ *единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x > y$; тогда из (1.1) следует, что $f(x) \geq f(y)$. т.е. $f(x)$ не убывает на E^1. Далее, из условий (1.2) и (1.1) вытекает, что существуют числа a и b такие, что $a < b, f(a) < 0, f(b) > 0$. Рассмотрим $f(x)$ на $[a,b]$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, существует $\xi \in (a,b)$, в которой $f(\xi) = 0$.

Если выполнено условие (1.4), то $f(x)$ строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$ и тогда нуль функции ξ на $(-\infty, +\infty)$ единственен. Лемма 1 доказана.

Заметим, что требования непрерывности в лемме 1 существенно. Например, функция

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} x^3 - 5 \quad \text{при } x < -1 \\ x + 2 \quad \text{при } -1 \leq x \leq 1 \\ x^7 + 4 \quad \text{при } x > 1 \end{matrix} \right\} \tag{1.5}$$

не являясь непрерывной на E^1, удовлетворяет остальным условиям леммы 1, но для этой функции уравнение (1.3) не имеет решения.

Обобщая ситуацию, рассмотренную в лемме, дадим теперь следующие общие определения.

Пусть X – вещественное сепарабельное нормированное пространство, а X^* – пространство, сопряжённое к X. Рассмотрим нелинейный оператор A, Итак, доказано, что оператор $A(x)$ является сильно монотонным оператором в E^2, с $c(t) = (\alpha - \beta)t$, если $\alpha > \beta$. Если $\alpha = \beta$, то $A(x)$ – монотонный оператор.

У п р а ж н е н и е 3. Докажите, что функция

$$A(x) = (x_1^5 + 3x_1 - 2x_2 + 1,\ 2x_2^7 + x_1 + 5x_2 - 4),$$

где $x = (x_1, x_2) \in E^2$ является сильно монотонным оператором в E^2.

Следующее определение обобщает условие (1.2) леммы 1.

О п р е д е л е н и е 1.4. Оператор $A : X \to X^*$ называется коэрцитивным, если для всех $x \in X$

$$\langle x, A(x)\rangle \geq \gamma(\|x\|)\|x\|, \tag{1.8}$$

где $\gamma(t)$ – функция, заданная при $t \geq 0$ и такая, что $\gamma(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

В дальнейшем мы будем использовать функции $c(t)$ и $\gamma(t)$ из определений 1.3 и 1.4, не оговаривая их существование для сильно монотонного и коэрцитивного операторов соответственно. Впрочем, между этими функциями имеется связь, которая устанавливается в следующей лемме.

Л е м м а 2. *Если оператор* $A : X \to X^*$ *сильно монотонный, то* A *коэрцитивный, причём можно принять*

$$\gamma(t) = c(t) - \|A(0)\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (1.7) при $y = 0$ имеем

$$\langle x, A(x)\rangle \geq c(\|x\|)\|x\| + \langle x, A(0)\rangle \geq c(\|x\|)\|x\| - \|x\|\|A(0)\|,$$

ибо $|\langle x, A(x)\rangle| \leq \|x\|\|A(0)\|$ и, значит, $\langle x, A(x)\rangle \geq -\|x\|\|A(0)\|$. полученное неравенство доказывает утверждение леммы 2.

З а м е ч а н и е. Если оператор коэрцитивен, то $\|A(x)\| \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$.

Действительно, имеем оценку

$$\|A(x)\|\|x\| \geq \langle x, A(x)\rangle \geq \gamma(\|x\|)\|x\|,$$

т.е. $\|A(x)\| \geq \gamma(\|x\|) \to \infty$, когда $\|x\| \to \infty$.

В заключение пункта приведём элементарную лемму о функции $c(t)$, фигурирующей в определении сильной монотонности.

Л е м м а 3. *Пусть дана непрерывная неотрицательная функция* $c : [0; +\infty] \to E^1$ *такая, что* $c(0) = 0, c(t) > 0$ *при* $t > 0$ *и* $c(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$. *Тогда из того, что* $t_m \geq 0, m = 1,2,\ldots,$ *и* $c(t_m) \to 0$ *при* $m \to +\infty$, *вытекает, что* $t_m \to 0$ *при* $m \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha_m = c(t_m) \to 0$ при $m \to \infty$, а $\{t_m\}$ не сходится к нулю. Тогда найдутся число $\delta > 0$ и последовательность $\{t_{m'}\}$ последовательности $\{t_m\}$ такие, что $t_{m'} \geq \delta > 0$ для всех m'; $\{t_{m'}\}$ ограничена. В противном случае нашлась бы её подпоследовательность $\{t_{m''}\}, t_{m''} \to +\infty$, а тогда и $c\{t_{m''}\} \to +\infty$, что невозможно, ибо $\alpha_{m''} \to 0$. Итак $\{t_{m'}\}$, ограничена. Тогда по теореме Больцано – Вейерштрасса найдётся её сходящаяся подпоследовательность $\{t_{m''}\}$, $t_{m''} \to t_0$, $m'' \to \infty$. По непрерывности $c(t_{m''}) \to c(t_0) > 0, m'' \to \infty$, а это тоже невозможно. Полученное противоречие доказывает тлемму.

2. Теоремы о существовании решений в конечномерном случае.

Докажем две теоремы о существовании решений уравнений с монотонными операторами в евклидовом пространстве E^n. Эти теоремы послужат базой для рассмотрения в последующих пунктах бесконечномерного случая.

Следующая теорема является непосредственным обобщением леммы 1 предыдущего пункта на случай сильно монотонного оператора E^n.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $A : E^n \to E^n$ *и непрерывен всюду в* E^n. *Если для всех* $x, y \in E^n$

$$(x - y, A(x) - A(y)) \geq c\|x - y\|^2, \qquad (2.1)$$

где $c > 0$ *- некоторая постоянная, то уравнение*

$$A(x) = 0 \tag{2.2}$$

имеет единственное решение $x^* \in E^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведём доказательство теоремы индукцией по размерности n пространства E^n. При $n = 1$ доказываемое утверждение верно. Действительно, условие (2.1) обеспечивает выполнение условий (2.3) и (2.2) леммы 1п. 1 (условие (1.1) этой леммы следует из леммы 2 п. 1). Итак, при $n = 1$ теорема 2.1 справедлива. Допустим теперь, что она справедлива в $E^{k-1}, k \geq 2$, и покажем, что тогда она будет верна и в E^k. Пусть $A : E^k \to E^k$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 (при $n = k$). Рассмотрим в E^k стандартный базис $\{e^i\}_{i=1}^k$(т.е. $e^i = (\delta_{ij})_{j=1}^k$ $(i = 1, \dots, k)$, δ_{ij} - символ Кронекера). Тогда в базисе оператор задаётся набором своих координатных функции :

$$A(x) = \{f_i(x)\}_{i=1}^k, \quad \text{где} \quad x = \sum_{j=1}^k x_j e_j.$$

Зафиксируем любое $t \in E^1$ и рассмотрим оператор $A_t : E^{k-1} \to E^{k-1}$, определяемы для всех $x = \sum_{i=1}^{k-1} x_j e_j$ следующей формулой :

$$A_t(x) = (f_i(x + te_k))_{i=1}^{k-1}.$$

Очевидно, оператор A_t непрерывен на E^{k-1} и для любых $x, y \in E^{k-1}$, согласно условию (2.1), для него выполняется следующее неравенство :

$$(x - y, A_t(x) - A_t(y)) = (t - t)[f_k(x + te_k) - f_k(y + te_k)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} (x_i - y_i)[f_i(x + te_k) - f_i(y + te_k)] \geq c\|x - y\|^2.$$

Это означает, что оператор A_t также удовлетворяет условию (2.1). По индуктивному предположению система уравнений

$$f_i(x + te_k) = 0, \quad i = 1, \dots, k - 1,$$
(2.3)