Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

Д.С. Кащенко, И.С. Кащенко

Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов специальности
Прикладная математика и информатика

Ярославль 2006

УДК 517
ББК В161.6
К 31

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2006 года

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор Н.Х. Розов;
кафедра математики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

К 31 **Кащенко, Д.С.** Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием: учебное пособие / Д.С. Кащенко, И.С. Кащенко; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 132 с.
ISBN 5-8397-0495-4 (978-5-8397-0495-4)

В пособии дано описание динамики дифференциальных уравнений первого порядка с запаздыванием. В первой части описаны новые методы исследования поведения решений в малой окрестности состояния равновесия, основанные на методах нормальных форм. Во второй части новыми методами сингулярного возмущения исследованы вопросы о существовании, устойчивости и асимптотике периодических решений сложной структуры в некоторой области фазового пространства.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 010501 Прикладная математика и информатика (дисциплина „Математическое моделирование“, блок ОПД), очной формы обучения.

Рис. 21. Библиогр.: 44 назв.

УДК 517
ББК В161.6

ISBN 5-8397-0495-4 (978-5-8397-0495-4)

ŋqdqʎəʎ bƎ dəqƎbʎɜə d ɔɑбɔʎ Ɉqddʎqʎè

Оглавление

Введение **5**

Часть I. Локальный анализ **7**

§1. Общие сведения 8

§2. Бифуркация Андронова-Хопфа 11

§3. Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием 18

§4. Локальная динамика уравнения с двумя запаздываниями . 28

§5. Динамика уравнения с двумя большими „близкими“ друг другу запаздываниями 40

§6. Динамика уравнения с двумя большими пропорциональными запаздываниями 50

§7. Динамика уравнения с большим и очень большим запаздыванием 54

§8. Динамика системы с линейно распределенным запаздыванием 63

§9. Нормализация в системе с периодически распределенным запаздыванием 79

§10. Заключение 86

Часть II. Нелокальный анализ **88**

§1. Динамика уравнения с релейной запаздывающей обратной связью 91

§2. Динамика уравнения со ступенчатой нелинейной обратной связью. Асимптотический анализ 100

§3. Динамика уравнения с нелинейностью импульсного типа . 110

§4. Числовые характеристики аттракторов уравнения первого порядка со ступенчатой нелинейностью 116

§5. Заключение 124

Литература **127**

ŋqdbɐəɎ bɆ dədɆbɎɜə b ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Введение

Уравнения первого порядка с запаздыванием вида

$$\dot{x} + x = f(x(t-T)) \quad (T > 0) \tag{0.1}$$

возникают во многих прикладных задачах [9, 31, 30, 33, 34, 35, 36, 39, 40, 43, 26, 5, 6, 21, 32, 22, 24, 29].

Фазовым пространством уравнения (0.1) удобно считать пространство $C_{[-T,0]}$ непрерывных на $[-T,0]$ функций со стандартной нормой. В этом смысле уравнение (0.1) существенно сложнее уравнения

$$\dot{x} + x = f(x), \tag{0.2}$$

в которое оно переходит при $T = 0$. Обыкновенное дифференциальное уравнение (0.2), как известно, интегрируется в квадратурах. Его решения стремятся либо к состоянию равновесия, т.е. к решению уравнения $x = f(x)$, либо неограниченно растут по модулю при $t \to \infty$. Решения уравнения (0.1) тоже вычислить достаточно просто. Так, положив в качестве начального условия функцию $\varphi(s) \in C_{[-T,0]}$ (т.е. $x(s) = \varphi(s)$ при $s \in [-T,0]$), на отрезке $t \in [0,T]$ приходим к уравнению

$$\dot{x} + x = f(\varphi(t-T)), \quad t \in [0,T],$$

из которого получаем, что при $t \in [0,T]$

$$x(t) = \varphi(0)e^{-t} + \int\limits_0^t e^{-(t-s)} f(\varphi(s-T))\, ds.$$

Теперь, зная решение $x(t)$ при $t \in [0,T]$, мы аналогично можем получить формулу для $x(t)$ при $t \in [T,2T]$ и т.д. Ниже будет показано, что в отличие от уравнения (0.2) динамика уравнения (0.1) может быть существенно богаче и интереснее. Основное внимание будет уделено изучению динамики уравнения (0.1) асимптотическими методами. Первая часть посвящена локальному анализу уравнения (0.1), т.е. исследованию поведения решений (0.1) в малой окрестности состояния равновесия. Наибольший интерес в этой части представляет изучение поведения решений этого уравнения при условии, когда запаздывание T достаточно велико. Во второй части изучается нелокальное поведение решений уравнения (0.1). Различными аналитическими методами будут изучены вопросы о существовании, устойчивости и асимптотике периодических решений сложной структуры.