Министерство образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра теории функций и функционального анализа

Элементы компьютерной алгебры

Методические указания

Ярославль 2004

ББК В 14я73+В15я73
Э 45
УДК 51(075)

Составители: Ф.И. Папоркова, Н.Б. Чаплыгина

Элементы компьютерной алгебры: Метод. указания / Сост. Ф.И. Папоркова, Н.Б. Чаплыгина; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль, 2004. – 32 с.

Цель данных методических указаний – помочь студентам в приобретении и закреплении элементарных навыков самостоятельного написания программ, связанных с изучением курса «Геометрия и алгебра. Часть 1».

Предназначены для студентов первого курса математического факультета, обучающихся по дисциплине «Дополнительные главы геометрии и алгебры» (блок ЕН), специальности 010200 Прикладная математика и информатика, очной формы обучения.

Рецензент: кафедра теории функций и функционального анализа Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Учебное издание

Элементы компьютерной алгебры

Составители: Папоркова Флорида Идыфатовна
Чаплыгина Надежда Борисовна

Редактор, корректор В.Н. Чулкова
Компьютерная верстка И.Н. Ивановой

Подписано в печать 08.04.2004 г. Формат 60×84/16.Бумага тип.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,6. Тираж экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета.
Отпечатано на ризографе.
Ярославский государственный университет.
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

Преобразование точек плоскости

Пусть задана прямоугольная система координат и точка P(x,y) с координатами x и y, задаваемая матрицей (xy). Под воздействием линейного преобразования, осуществляемого матрицей A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, точка P(x,y) отображается в точку P*(x*, y*), что эквивалентно записи $(xy)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (x^* \; y^*)$ или ax+cy=x*, bx+dy=y*.

Рассмотрим несколько частных случаев, демонстрирующих разное влияние отдельных элементов матрицы на перемещение точки P. Начнем с элементов главной диагонали:

1. Тождественное преобразование задается матрицей A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и не меняет положения точки P. Действительно, $(xy)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x^* \; y^*)$ или x=x*, y=y*.

2. Матрица A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ осуществляет симметричное отображение точки P(x,y) относительно начала координат, что эквивалентно повороту точки на 180°: $(xy)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x^*, y^*), \quad -x = x^*, \quad -y = y^*.$

3. Матрица A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ вызывает симметричное отображение точки P(x,y) относительно оси Oy:

$$(xy)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x^*, y^*), \quad -x = x^*, \quad y = y^*.$$

4. Матрица A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ осуществляет отображение, симметричное относительно оси Ox: $(xy)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x^*, y^*), \quad x = x^*, \quad -y = y^*.$

5. Матрица A=$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ вызывает перемещение точки P(xy) в направлении оси Ox: $(xy)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x^*, y^*), \quad ax = x^*, \quad y = y^*.$

6. Матрица A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ осуществляет перемещение точки P(xy) в направлении оси Oy.

ŋqdpyeY bE debEbY3e d ecaбcy JqddYqyè

7. Матрица А=$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ вызывает перемещение одновременно вдоль осей Ох и Оу. При a=d>1 имеет место увеличение масштаба координат точки Р. При 0<a=d<1 – уменьшение масштаба. Итак, элементы главной диагонали матрицы преобразования вызывают отображение и изменение масштаба координат. Далее рассмотрим влияние элементов побочной диагонали матрицы преобразования.

8. Матрица А=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ осуществляет симметричное отображение относительно прямой у=х: $(xy)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (x^*, y^*), \quad y = x^*, \quad x = y^*.$

9. Матрица А=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ осуществляет симметричное отображение относительно прямой у=-х.

10. Матрица А=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ вызывает поворот на 90° против часовой стрелки:

$$(xy)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (x^*, y^*), \quad -y = x^*, \quad x = y^*.$$

11. Матрица А=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ вызывает поворот на 270° против часовой стрелки: $(xy)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (x^*, y^*), \quad y = x^*, \quad -x = y^*.$

Таким образом, элементы побочной диагонали матрицы вызывают либо поворот, либо симметричное отображение.

Матрицы вида $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, где b≠±1, c≠±1, осуществляют симметрию с последующим изменением масштаба соответственно по оси Ох и оси Оу.

Наконец рассмотрим преобразования сдвига и смещения.

12. Матрица А=$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ осуществляет сдвиг в направлении оси Оу:

$$(xy)\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x^*, y^*), \quad (x \quad bx + y) = (x^* \; y^*), \quad x = x^*, \quad bx + y = y^*.$$

13. Матрица А=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ вызывает сдвиг в направлении оси Ох:

$$(xy)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = (x^*, y^*), \quad (x+cy \quad y) = (x^* \; y^*), \quad x+cy = x^*, \quad y = y^*.$$

Результат преобразования точек с помощью матрицы общего вида, когда преобразование применено к началу координат, имеет вид $(0 \quad 0)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (x^* \; y^*)$ *или* $x^* = 0, \; y^* = 0$. Это означает, что начало координат является инвариантом. Это ограничение может быть преодолено путем введения однородных координат, о которых более подробно будет сказано позднее. Сейчас мы лишь заметим, что эта трудность преодолевается при помощи преобразования, задаваемого матрицей вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$, и введения третьей компоненты в радиус-векторы точек P(x,y) и P*(x*,y*), т.е. представляя их в виде (x y 1) и (x* y* 1). Действительно, имеем:

$$(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} = (x^* \; y^* 1) \quad \text{или} \quad (x+m \quad y+n \quad 1) = (x^* \; y^* 1).$$