

УДК 519.6:539.3(075.8)

ББК 22.251.1 я73

К27

*Печатается по решению кафедры теории упругости  
Института математики, механики и компьютерных наук  
им. И. И. Воровича Южного федерального университета  
(протокол № 6 от 21 июня 2024 г.)*

**Рецензенты:**

заведующий кафедрой «Информационные технологии»  
Донского государственного технического университета,  
доктор технических наук, профессор *Б. В. Соболев*;

заведующий кафедрой вычислительной математики  
и математической физики Южного федерального университета,  
доктор физико-математических наук, профессор *М. Ю. Жуков*

**Карякин, М. И.**

К27 Автоматизация решения задач нелинейной теории упругости :  
учебное пособие / М. И. Карякин ; Южный федеральный универси-  
тет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федераль-  
ного университета, 2024. – 208 с.

ISBN 978-5-9275-4741-8

В учебном пособии описаны возможности, представляемые современными средствами компьютерной алгебры для автоматизации численного анализа краевых задач нелинейной теории упругости на основе полубратного метода. Приведены примеры кода для такой автоматизации в рамках системы компьютерной алгебры Maple, а также с использованием пакета SymPy для языка Python. Показано, как системы аналитических вычислений могут ускорить организацию конечно-элементных расчетов поведения упругих тел при больших деформациях.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов направлений подготовки, связанных с прикладной математикой, механикой и математическим моделированием.

ISBN 978-5-9275-4741-8

УДК 519.6:539.3(075.8)

ББК 22.251.1 я73

© Южный федеральный университет, 2024  
© Карякин М. И., 2024

# Содержание

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Предисловие</b> . . . . .  | <b>5</b>  |
| <b>1 Краткое введение в нелинейную теорию упругости</b> . . .   | <b>12</b> |
| 1.1 Основные понятия механики сплошной среды . . . . .  | 12        |
| 1.2 Градиент деформации. Меры и тензоры деформации . . . .  | 15        |
| 1.3 Силы и напряжения . . . . .   | 22        |
| 1.4 Определяющие соотношения нелинейной теории упругости  | 25        |
| 1.5 Употребительные модели упругих материалов . . . . .   | 32        |
| 1.6 Полная система уравнений нелинейной теории упругости .  | 43        |
| 1.7 Задания и упражнения для самостоятельной и проектной<br>работы . . . . .                          | 48        |
| <b>2 Полуобратный метод нелинейной теории упругости и<br/>его автоматизация</b> . . . . .             | <b>53</b> |
| 2.1 Общее представление о полуобратном методе . . . . .   | 53        |
| 2.2 Дифференциальные операции в криволинейных координа-<br>тах и их компьютерная реализация . . . . . | 56        |
| 2.2.1 Основные формулы и определения . . . . .  | 56        |
| 2.2.2 Реализация вычисления дифференциальных опера-<br>торов в среде Maple . . . . .                  | 61        |
| 2.2.3 Реализация дифференциальных операторов с исполь-<br>зованием пакета SymPy . . . . .             | 78        |
| 2.3 Задачи и упражнения для самостоятельной работы . . . . .  | 89        |
| <b>3 Редуцированные краевые задачи нелинейной теории упру-<br/>гости</b> . . . . .                    | <b>97</b> |
| 3.1 Пример использования полуобратного метода . . . . .   | 97        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.1.1    | Дисклинация в цилиндре из материала Блейтца и Ко. Аналитическое решение . . . . .                | 98         |
| 3.1.2    | Генерирование краевой задачи в Maple . . . . .   | 107        |
| 3.1.3    | Генерирование краевой задачи с использованием пакета sympy . . . . .                             | 112        |
| 3.2      | Численное решение нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . . | 120        |
| 3.2.1    | Численный анализ дифференциальных уравнений средствами Maple . . . . .                           | 121        |
| 3.2.2    | Поля напряжений, создаваемых клиновой дисклинацией . . . . .                                     | 136        |
| 3.2.3    | Численное решения нелинейных краевых задач с использованием SciPy . . . . .                      | 147        |
| 3.2.4    | О влиянии клиновой дисклинации на изменение длины цилиндра . . . . .                             | 154        |
| 3.3      | Задания для самостоятельной и проектной работы . . . . .   | 164        |
| <b>4</b> | <b>Конечно-элементный анализ задач нелинейной теории упругости . . . . .</b>                     | <b>177</b> |
| 4.1      | Численный анализ нелинейных задач в пакете FlexPDE . . . . .                                     | 177        |
| 4.2      | Задачи для самостоятельной и проектной работы . . . . .  | 201        |
|          | <b>Список литературы . . . . .</b>   | <b>204</b> |