

Р.Ф. Маликов

# Основы математического моделирования

*Допущено Учебно-методическим объединением по  
профессионально-педагогическому образованию в  
качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся по  
специальности 050501.06 – Профессиональное  
обучение (информатика, вычислительная  
техника)*

Москва  
Горячая линия – Телеком  
2010

УДК 53:51(075.8)

ББК 22.311.73

М19

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор *Р. М. Асадуллин*;  
доктор техн. наук, профессор *Б. Г. Ильясов*

**Маликов Р. Ф.**

**М19** Основы математического моделирования. Учебное пособие для вузов. — М.: Горячая линия—Телеком, 2010. — 368 с.: ил. ISBN 978-5-9912-0123-0.

Книга посвящена основам математического (аналитического, численного и вероятностного) и компьютерного моделирования реальных процессов, явлений и объектов. Рассмотрены более 50 физических объектов, их математические модели, задания к выполнению и компьютерные программы для отработки умений и навыков решения задач методами численного, вероятностного (методом Монте-Карло) моделирования реальных объектов.

Для студентов естественнонаучных факультетов и институтов классических, педагогических и технических университетов, будет полезна аспирантам, преподавателям и другим специалистам, использующим в своих исследованиях методы математического и компьютерного моделирования.

**ББК 22.311.73**

*Адрес издательства в Интернет WWW.TECHBOOK.RU*

Учебное издание

**Маликов Рамиль Фарукович**

**Основы математического моделирования**

Учебное пособие

Редактор Ю. Н. Чернышов

Компьютерная верстка Ю. Н. Чернышова

Обложка художника В. Г. Ситникова

Подписано в печать 10.10.2009. Печать офсетная. Формат 60×88/16.

Уч. изд. л. 23. Тираж 1000 экз.

Отпечатано в ООО «Типография Полимаг» 127242. Москва, Дмитровское шоссе. 107

ISBN 978-5-9912-0123-0

© Р. Ф. Маликов, 2010

© Оформление издательства

«Горячая линия—Телеком», 2010

## Предисловие

Моделирование широко используется в различных сферах человеческой деятельности. Цель моделирования — получение, обработка и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой. Модели выступают как средство познания свойств и закономерностей поведения объектов. Наиболее универсальный вид моделирования — математическое моделирование, которое ставит в соответствие моделируемому физическому процессу систему математических соотношений. Решение этой системы позволяет получить ответ на вопрос о поведении объекта без создания физической модели, которая часто оказывается дорогостоящей и неэффективной. Математическое моделирование служит средством изучения реального объекта или процесса путем их замены математической моделью, более удобной для экспериментального исследования с помощью ЭВМ.

Данная книга является вводным пособием по изучению основ математического и компьютерного моделирования реальных объектов. Содержание книги соответствует триаде математического моделирования, высказанного академиком А.А. Самарским, — «модель — алгоритм — программа». В книге приведены методы создания аналитических, численных и вероятностных моделей, а также технологии компьютерного моделирования.

Учебное пособие состоит из двух частей. Первая часть посвящена основам аналитического и компьютерного моделирования. Она состоит из шести глав.

В главе 1 вводятся общие понятия о моделях, математическом моделировании, приводится классификация моделей, рассматриваются этапы математического моделирования и дается характеристика различных методов моделирования физических систем и объектов.

Глава 2 посвящена различным подходам к построению математических моделей физических объектов и явлений.

В главе 3 рассматриваются основы теории подобия. Основное внимание уделено методам масштабирования уравнений, необходимых для компьютерного моделирования физических объектов.

В главе 4 в краткой форме даются логико-эвристические предпосылки к построению дискретной математической модели физического объекта. Здесь рассмотрены методы численного решения математических моделей физических объектов, представленных в виде обыкновенных дифференциальных уравнений.

В главе 5 изложены технологии компьютерного моделирования в системе Excel и в часто используемых для моделирования системах компьютерной математики Maple и MathCAD.

В главе 6 приведены лабораторные работы для компьютерного моделирования: постановка задачи, математические модели в виде дифференциальных уравнений или систем уравнений, рекомендации и задания для проведения вычислительного эксперимента и результаты моделирования.

Во второй части книги рассмотрены основы теории случайных процессов, на задачах нейтронной и квантовой физики показаны технологии применения метода статистических испытаний (Монте-Карло). Понимание метода статистических испытаний приходит только при их решении и общении с компьютером, поэтому для некоторых задач в качестве примера приведены также алгоритмы, программы решения и результаты моделирования.

В главе 7 даны краткие сведения из теории вероятностей и сущность метода Монте-Карло. Проведена условная классификация вероятностно-статистического моделирования по типу решаемых задач, дан анализ достоинств и недостатков вероятностных методов, применяемых при решении математических задач.

В главе 8 приведены технологии решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, вычисление интегралов, дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического и параболических типов методом вероятностного моделирования.

В главе 9 рассмотрены задачи нейтронной физики, нелинейной оптики, молекулярной физики, для решения которых использованы методы Монте-Карло.

Для более глубокого изучения основ математического и компьютерного моделирования мы рекомендуем книги, приведенные в списке литературы. В приложениях представлены листинги компьютерных программ решения ряда задач на языках программирования. Ответы и решения для задач глав 6–9 в виде программного кода приведены на сайте издательства «Горячая линия–Телеком» [www.techbook.ru](http://www.techbook.ru).

Изучение основ математического и компьютерного моделирования, изложенных в данном пособии, предусмотрено Государственным образовательным стандартом по физическим, инженерным и компьютерным специальностям.

Книга написана на основе многолетнего опыта преподавания основ математического и компьютерного моделирования физических объектов по специальностям 032200 и направлению 510400 – Физика, 030100 – Информатика, 030500.06 — Профессиональное обучение (информатика, ВТ и компьютерные технологии) и содержит более 50 примеров и задач, ориентированных на применение технологий математического моделирования.

Автор выражает признательность своим коллегам: профессору кафедры общей физики, д.ф.-м.н. И.А. Фахретдинову, доценту кафедры теоретической физики, к.ф.-м.н. Р.К. Саитову, старшему преподавателю кафедры общей физики, к.ф.-м.н. Э.Р. Жданову, к.ф.-м.н. Р.Х. Мустафину за помощь при создании примеров математических моделей физических объектов, а также профессору БГПУ им. М. Акмуллы, д.ф.-м.н. Р.М. Асадуллину, профессору УГАТУ, д.т.н., члену-корреспонденту АН РБ Б.Г. Ильясову за рекомендацию книги к изданию. Автор благодарит коллектив издательства «Горячая линия — Телеком» за помощь при издании этой книги.

Учебное пособие рассчитано на студентов, обладающих знанием основ общей и элементов теоретической физики, теории вероятностей и математической статистики, математического анализа и теории дифференциальных уравнений. Оно может быть использовано при проведении вычислительного практикума, при постановке и решении задач по курсовому и дипломному проектированию. Кроме того, данное издание будет полезно преподавателям, магистрам и студентам, специализирующимся в области математического и компьютерного моделирования реальных объектов.

# Оглавление

|   |     |
|---|-----|
| <b>Предисловие</b> .....  | 3   |
| <b>Часть I. Основы аналитического моделирования</b>                                   |     |
| <b>Глава 1. Основные понятия моделирования</b> .....                                  | 9   |
| 1.1. Классификация моделей .....  | 9   |
| 1.2. Виды моделирования .....   | 15  |
| 1.3. Понятие о математической модели .....  | 19  |
| 1.4. Этапы математического моделирования .....  | 23  |
| 1.5. Анализ методов решения математических моделей .....                              | 33  |
| <b>Глава 2. Методы построения математической модели</b> .....                         | 39  |
| 2.1. Построение математических моделей на основе законов сохранения .....             | 42  |
| 2.2. Применение фундаментальных уравнений физики (метод от «общего к частному») ..... | 47  |
| 2.3. Иерархический подход к построению моделей (метод от «простого к сложному») ..... | 50  |
| 2.4. Метод вариационных принципов .....   | 59  |
| 2.5. Построение моделей на основе метода аналогий .....                               | 68  |
| 2.6. Этапы создания аналитической модели реальных объектов .....                      | 73  |
| <b>Глава 3. Основы теории подобия</b> .....   | 75  |
| 3.1. Теоремы теории подобия .....   | 76  |
| 3.2. Метод подобного масштабирования уравнений .....                                  | 77  |
| 3.3. Метод использования характерных масштабов .....                                  | 83  |
| <b>Глава 4. Основы численного моделирования</b> .....                                 | 92  |
| 4.1. Понятие о дискретном аналоге математической модели .....                         | 93  |
| 4.2. Методы численного решения математических моделей .....                           | 99  |
| 4.3. Обработка полученной информации .....  | 112 |
| <b>Глава 5. Основы систем компьютерной математики</b> .....                           | 115 |
| 5.1. Моделирование физических явлений в системе Excel .....                           | 116 |
| 5.2. Моделирование физических объектов в системе Maple .....                          | 125 |
| 5.3. Моделирование физических систем в среде MathCAD .....                            | 136 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Глава 6. Задачи для компьютерного моделирования</b> .....                           | 143 |
| 6.1. Полеты летательных аппаратов .....  | 143 |
| 6.2. Движение тела с учетом сопротивления среды .....                                  | 146 |
| 6.3. Движение небесного тела в гравитационном поле .....                               | 148 |
| 6.4. Полет сверхзвукового самолета.....  | 151 |
| 6.5. Полет одноступенчатой ракеты.....   | 153 |
| 6.6. Стыковка космического корабля .....   | 155 |
| 6.7. Параметрический маятник.....  | 157 |
| 6.8. Маятник Фуко.....   | 159 |
| 6.9. Колебания пружинного маятника под действием различных сил.....                    | 160 |
| 6.10. Двойной маятник .....  | 162 |
| 6.11. Связанные маятники.....  | 164 |
| 6.12. Связанные осцилляторы.....   | 166 |
| 6.13. Задача Ферми–Паста–Улама.....  | 168 |
| 6.14. Успокоители механических колебаний.....  | 170 |
| 6.15. Распространение волн на воде. Солитоны .....                                     | 171 |
| 6.16. Распространение звука в газах .....  | 175 |
| 6.17. Метод молекулярной динамики.....   | 177 |
| 6.18. Форма капли жидкости .....   | 184 |
| 6.19. Замерзание капли.....  | 186 |
| 6.20. Решение уравнения теплопроводности.....  | 188 |
| 6.21. Решение уравнения Пуассона.....  | 191 |
| 6.22. Силовые линии электрического поля.....   | 193 |
| 6.23. Движение заряженных частиц в магнитном поле.....                                 | 195 |
| 6.24. Возмущение орбиты электрона в однородном магнитном поле движущимся протоном..... | 199 |
| 6.25. Движение заряженной частицы в скрещенных полях .....                             | 201 |
| 6.26. Пространственный осциллятор .....  | 202 |
| 6.27. Движение заряженных частиц в кулоновском поле .....                              | 204 |
| 6.28. Генерирование колебаний.....   | 206 |
| 6.29. Выпрямление с фильтрацией .....  | 209 |
| 6.30. Явление гистерезиса .....  | 210 |
| 6.31. Явление радуги.....  | 213 |
| 6.32. Явление миража.....  | 216 |
| 6.33. Градиентные световоды .....  | 218 |
| 6.34. Квантово-механическая модель атома. Часть I.....                                 | 220 |
| 6.35. Квантово-механическая модель атома. Часть II.....                                | 223 |
| 6.36. Расчет молекулы бензола методом Хюккеля.....                                     | 226 |
| 6.37. Генерация лазерного излучения.....   | 229 |
| 6.38. Сверхизлучение.....  | 232 |

|   |     |
|---|-----|
| 6.39. Когерентное усиление ультракоротких импульсов света ..... | 239 |
| 6.40. Явление фотонного и стимулированного светового эха.....   | 243 |

## Часть II. Основы статистического моделирования реальных явлений (методы Монте-Карло)

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава 7. Методы Монте-Карло и понятия теории вероятностей</b> | <b>248</b> |
|--|------------|

|   |     |
|---|-----|
| 7.1. Понятие о численном вероятностно-статистическом моделировании .....    | 249 |
| 7.2. Некоторые понятия и теоремы теории вероятностей .....                  | 252 |
| 7.3. Генераторы, алгоритмы получения и преобразования случайных чисел ..... | 266 |
| 7.4. Недостатки и достоинства методов Монте-Карло.....                      | 276 |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава 8. Вероятностное моделирование математических задач</b> | <b>280</b> |
|--|------------|

|   |     |
|---|-----|
| 8.1. Решение системы линейных уравнений методом Монте-Карло                             | 280 |
| 8.2. Вычисление интегралов способом среднего .....                                      | 285 |
| 8.3. Вычисление определенных интегралов способом «зонтика» Неймана .....                | 290 |
| 8.4. Вычисление значения числа $\pi$ .....  | 292 |
| 8.5. Решение уравнений эллиптического типа .....  | 295 |
| 8.6. Решение уравнений параболического типа на примере уравнения теплопроводности ..... | 299 |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава 9. Моделирование физических процессов и явлений методом Монте-Карло.....</b> | <b>302</b> |
|---|------------|

|   |     |
|---|-----|
| 9.1. Метод Монте-Карло при моделировании задач нейтронной физики .....                            | 302 |
| 9.2. Моделирование прохождения $\gamma$ -излучения через вещество....                             | 315 |
| 9.3. Метод броуновской динамики.....  | 318 |
| 9.4. Моделирование броуновских траекторий.....  | 322 |
| 9.5. Моделирование явления спонтанного излучения атомов .....                                     | 324 |
| 9.6. Моделирование явления спонтанного излучения многоатомной системы (сверхизлучение Дике) ..... | 327 |

|                        |            |
|------------------------|------------|
| <b>Литература.....</b> | <b>331</b> |
|------------------------|------------|

|                         |            |
|-------------------------|------------|
| <b>Приложения .....</b> | <b>338</b> |
|-------------------------|------------|

|   |     |
|---|-----|
| Приложение 1. Ответы и решения задач..... | 338 |
|---|-----|

|   |     |
|---|-----|
| Приложение 2. Применение градианов..... | 361 |
|---|-----|

|  |     |
|--|-----|
| Приложение 3. Таблица равномерно распределённых случайных чисел..... | 361 |
|--|-----|

|   |     |
|---|-----|
| Приложение 4. Микросечения некоторых веществ..... | 362 |
|---|-----|

|   |     |
|---|-----|
| Приложение 5. Список программ для компьютерного моделирования реальных объектов ..... | 362 |
|---|-----|