МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. И. Мармо,
М. В. Фролов

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть II

Учебное пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

Содержание

ŋqdpaʎeY bɆ dep£bY3e d ɛɑɑbcʎ ɟqdpYqʎè

Переменные величины E_x и E_y удовлетворяют уравнению

$$\frac{E_x^2}{b_1^2} + \frac{E_y^2}{b_2^2} = 1. \tag{1.13}$$

Видно, что в каждой точке пространства конец вектора напряженности электрического поля описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Такие волны называются *эллиптически поляризованными*. Знаки «+» и «−» перед коэффициентом b_2 в формуле (1.12) соответствуют правой и левой поляризациям. В случае $b_1 = b_2 = b$ эллипс превращается в окружность, и волна (1.12) называется поляризованной по кругу или циркулярной. Величина b, численно равная модулю напряженности электрического поля, является амплитудой этой волны. Когда один из векторов $\mathbf{b}_1$ или $\mathbf{b}_2$ обращается в нуль, волну называют линейно поляризованной (поляризованной в плоскости). Ее записывают в одном из двух видов

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha), \tag{1.14}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}E_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}, \tag{1.15}$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор поляризации, $\mathbf{E}_0$ — амплитуда, а α — постоянный сдвиг фазы. Физический смысл имеет только вещественная или мнимая часть комплексного выражения (1.15).

1.1. Уравнения Максвелла

Примеры решения задач

Пример 1.1. Показать, что магнитное поле $\mathbf{B}$ в вакууме в отсутствие токов и зарядов ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.16}$$

Решение. Применив операцию rot к обеим частям уравнения (1.1.2), в котором $\mathbf{j} = 0$, и учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ (так как $\rho = 0$), получим

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Подставив сюда $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ из уравнения (1.1.4), получим волновое уравнение (1.16) для магнитной индукции.

Пример 1.2. В цилиндрических координатах компоненты вектора индукции магнитного поля в свободном пространстве имеют вид $B_r = B_\varphi = 0$

ђddqyeY bĘ dedĘbY3e d ɐɔɑbɔɣ Ɉddqүqyè

и $B_z = B(r,t)$, где функция $B(r,t)$ и ее производные ограничены. Определить напряженность $\mathbf{E}$ вихревого электрического поля, индуцированного данным магнитным полем.

Решение. Запишем уравнение Максвелла (1.1.4) в интегральной форме:

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}d\mathbf{S}. \tag{1.17}$$

Из геометрии задачи ясно, что напряженность $\mathbf{E}$ вихревого электрического поля перпендикулярна вектору $\mathbf{B}$ и не зависит от координат φ и z. Возьмем в качестве контура в (1.17) окружность радиусом r с центром на оси симметрии магнитного поля и с плоскостью, перпендикулярной вектору $\mathbf{B}$. Тогда из (1.17) получим

$$E = -\frac{1}{cr}\int\limits_0^r \frac{\partial}{\partial t}B(\xi,t)\xi d\xi. \tag{1.18}$$

Непосредственным дифференцированием нетрудно убедиться, что напряженность $\mathbf{E}$ найденного вихревого электрического поля удовлетворяет уравнениям Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, в которых заданная функция $\mathbf{B}$ является решением волнового уравнения (1.16).

Пример 1.3. Заряд Q и масса m однородно заполняют объем шара. В начальный момент времени $t_0 = 0$ включается внешнее магнитное поле с напряженностью $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, которая постоянна по направлению и удовлетворяет начальному условию $\mathbf{B}(0) = 0$. Зависимостью вектора $\mathbf{B}$ от координат в пределах шара можно пренебречь. Под влиянием магнитного поля шар приходит во вращение. Пренебрегая обратным влиянием вращающегося шара на внешнее магнитное поле, определить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращения.

Решение. Используя результаты предыдущей задачи, находим напряженность вихревого электрического поля

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2c}\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right],$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения, проведенный из центра шара. Момент сил, приложенный к шару,

$$\int [\mathbf{r}\times\rho\mathbf{E}]dV = -\frac{QR^2}{5c}\frac{d\mathbf{B}}{dt}.$$

Производная по времени от механического момента

$$\mathbf{L} = \frac{2}{5}mR^2\boldsymbol{\omega}$$

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ȼɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

шара равна моменту внешних сил. Это приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\frac{Q}{2mc}\frac{d\mathbf{B}}{dt},$$

интегрирование которого с учетом начального условия дает следующее значение угловой скорости:

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{Q\mathbf{B}}{2mc}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Показать, что из уравнений Максвелла следует закон сохранения заряда $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$.

1.2. Показать, что уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ совместны.

1.3. Показать, что уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ и $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ совместны.

1.4. Используя соответствующее уравнение Максвелла и соображения симметрии, получить закон Кулона.

1.5. Показать, что поток вектора $\mathbf{E}$ через замкнутую поверхность равен нулю, если внутри поверхности отсутствуют заряды.

1.6. Показать, что поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\,.$$

1.7. Показать, что электрическое поле $\mathbf{E}$ в вакууме в отсутствие токов и зарядов ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) удовлетворяет волновому уравнению $\nabla^2\mathbf{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$.

1.2. Электромагнитные волны

Примеры решения задач

Пример 1.4. Две монохроматические волны $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01}\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_1)$ и $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02}\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_2)$ поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях. Считая амплитуду этих волн одинаковой, найти поляризацию результирующей волны.

Решение. Запишем напряженности электрических полей в комплексном виде

$$\mathbf{E}_1 = \operatorname{Re}[\mathbf{E}_{01}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t-\alpha_1)}], \qquad \mathbf{E}_2 = \operatorname{Re}[\mathbf{E}_{02}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t-\alpha_2)}].$$