

УДК 517.518.112:517.98 (075.8)

ББК 22.162 я73

Т41

Рецензенты: ведущий научный сотрудник лаборатории математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова канд. физ.-мат. наук, с.н.с. *В. А. Носов*, профессор кафедры дифференциальных уравнений МГУ имени М. В. Ломоносова, доктор физ.-мат. наук *И. В. Астапова*.

Тимашев А. Н.

Т41 Мера и интеграл: краткий курс. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2022. – 132 с.: ил.

ISBN 978-5-9912-0687-7.

Кратко изложен курс теории меры и интеграла Лебега, предназначенный для изучения на механико-математических и физико-математических факультетах университетов и других вузов с повышенной математической подготовкой. В основу пособия положены материалы лекционного курса, который автор многие годы читал на факультете прикладной математики Института криптографии, связи и информатики.

Для студентов (слушателей) высших учебных заведений, обучающихся по техническим специальностям.

ББК 22.162 я73

Учебное издание

Тимашев Александр Николаевич

МЕРА И ИНТЕГРАЛ: КРАТКИЙ КУРС

Учебное пособие для вузов

Тиражирование книги начато в 2018 г.

Все права защищены.

Любая часть этого издания не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения правообладателя

© ООО «Научно-техническое издательство «Горячая линия – Телеком»

www.techbook.ru

© А. Н. Тимашев

Оглавление

Предисловие	3
I. Элементы теории меры	4
1.1. Классы множеств	4
1.2. Действительные функции множеств	14
1.3. Меры на классах множеств	17
1.4. Внешняя мера	28
1.5. Продолжение меры по схеме Лебега	30
1.6. Прямые произведения мер	41
1.7. Мера Лебега–Стилтьеса в \mathbb{R}^k	45
1.8. Неизмеримые множества	48
II. Измеримые функции	51
2.1. L -измеримые функции. Борелевские функции и функции, измеримые по Лебегу	51
2.2. Сходимость почти всюду и сходимость по мере. Теоремы Лебега и Рисса	57
2.3. Теоремы Егорова и Лузина	61
2.4. Простые функции. Теорема об аппроксимации	64
III. Интеграл Лебега	68
3.1. Определение и простейшие свойства интеграла Лебега	68
3.2. Интеграл как функция множества	76
3.3. Предельный переход под знаком интеграла. Теорема Беппо Леви	81
3.4. Аддитивность интеграла Лебега	83
3.5. Предельный переход под знаком интеграла. Лемма Фату и теорема Лебега	86
3.6. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега	89
3.7. Кратные интегралы	91
3.8. Интегралы Римана–Стилтьеса и Лебега–Стилтьеса	92
3.9. Интегрирование комплексных функций	100
3.10. Пространство \mathfrak{L} и его полнота	102
3.11. Повторные интегралы. Теорема Фубини	105
3.12. Пространство \mathfrak{L}^2 и его полнота	112
3.13. Интеграл Лебега и ряды Фурье	118
Литература	121
Предметный указатель	123
Приложение	126