

УДК 53 : 51 (075.8)  
С 764

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *Г.А. Швецов*  
д-р техн. наук, доцент *А.В. Гуськов*

**Станкевич С.В.**

С 764 Математическое моделирование физических процессов:  
учебное пособие / С. В. Станкевич. – Новосибирск: Изд-во НГТУ,  
2020. – 120 с.

ISBN 978-5-7782-4233-3

В первой части пособия рассматриваются физические задачи, математические модели которых могут быть представлены в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Во второй части на основе метода конечных разностей рассматриваются методы численного решения нестационарных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.

УДК 53 : 51 (075.8)

ISBN 978-5-7782-4233-3

© Станкевич С.В., 2020  
© Новосибирский государственный  
технический университет, 2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
ЧАСТЬ I .....	5
<b>Раздел 1. Основные этапы численного решения задачи на ЭВМ .....</b>	<b>5</b>
Погрешности в вычислительном эксперименте.....	6
Требования к вычислительным методам .....	7
<b>Раздел 2. Примеры математических моделей некоторых процессов.....</b>	<b>8</b>
Простая математическая модель для задачи об остывании тела .....	8
Выравнивание температур при теплообмене .....	9
Кинетика химических реакций.....	11
Изменение атмосферного давления с изменением расстояния от поверхности Земли.....	12
<b>Раздел 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) первого порядка .....</b>	<b>13</b>
Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений .....	13
Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).....	14
Одношаговые методы решения задачи Коши .....	14
Явный метод Эйлера.....	14
Неявный метод Эйлера.....	17
Простой метод повышения порядка точности (метод трапеций, или метод Хьюна) .....	19
Метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности .....	21
<b>Раздел 4. Устойчивость разностных схем.....</b>	<b>22</b>
Устойчивость одношаговых методов Эйлера .....	23
Явный метод Эйлера.....	23

Неявный метод Эйлера.....	24
Метод трапеций .....	25
Примеры применения различных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.....	26
Пример 1. Экспоненциально растущая функция $\lambda > 0$ .....	26
Пример 2. Зависимость $y(t)$ может быть представлена полиномом .....	27
Пример 3. Решение уравнения для процесса гармонических колебаний ...	28
<b>Раздел 5. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений .....</b>	<b>30</b>
Более общая форма системы (ОДУ) первого порядка.....	32
<b>Раздел 6. Моделирование уравнений движения тел на основе второго закона Ньютона.....</b>	<b>33</b>
Падение тел у земной поверхности.....	35
Проведем анализ полученного решения.....	37
Анализ схем численного решения задачи о падении тел .....	37
Двумерные траектории. Движение тела без учета сил сопротивления.....	40
Учет силы сопротивления среды при решении уравнений движения Ньютона.....	42
Режимы течения. Вязкость. Число Рейнольдса.....	42
Формула Стокса .....	43
Сила гидравлического сопротивления.....	44
Двумерные траектории с учетом сил сопротивления.....	47
Сохранение энергии.....	48
Движение материальной точки (МТ) в центральном поле .....	50
Потенциальное поле и силовая функция .....	50
Законы сохранения .....	52
Гравитационное поле (ньютоново поле).....	54
Взаимодействие заряженных частиц (кулоново поле) .....	54
Расчет ускорения свободного падения на поверхностях Земли и Луны на основе закона всемирного тяготения Ньютона .....	56
Задача двух тел.....	56
Примеры траекторий движения двух тел .....	58

<b>Раздел 7. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле</b> .....	59
Движение в электрическом поле .....	59
Электростатическое отклоняющее устройство .....	60
Оценка скорости .....	61
Электронно-лучевая трубка .....	61
Действие магнитного поля на движение заряженной частицы .....	62
Период вращения заряженных частиц в магнитном поле.....	64
Масс-спектрометр.....	64
Вычисление компонент силы Лоренца .....	65
Движение заряженных частиц в скрещенных магнитном и электрическом полях .....	66
Направление электрического поля совпадает с направлением магнитного.....	67
Электрическое поле направлено перпендикулярно магнитному полю .....	68
Переменное электрическое поле .....	68
<b>Раздел 8. Линейные и нелинейные колебательные системы</b> .....	69
Гармонические и ангармонические колебания .....	70
Механические колебательные системы при отсутствии потерь.....	71
Маятник .....	71
Колебание массы, закрепленной на пружине.....	71
Сохранение энергии.....	73
Колебательные системы с учетом потерь (трения).....	75
Изменение энергии осциллятора в случае затухающих колебаний .....	77
Электрический последовательный RLC-контур .....	79
Периодический и аperiodический разряд конденсатора .....	80
Вынужденные электрические колебания под действием синусоидальной ЭДС.....	81
Основные сведения о вынужденных электрических колебаниях.....	81
Последовательный колебательный контур.....	82
Резонанс напряжений в последовательном колебательном контуре .....	83
Резонанс тока в параллельном колебательном контуре .....	85
Вынужденные колебания пружинного маятника.....	86

Максимальные амплитуды смещения и скорости .....	87
Условия достижения максимальной поглощаемой мощности .....	87
Условия достижения максимальной амплитуды колебаний.....	88
<b>Раздел 9. О классификации колебаний.....</b>	<b>88</b>
Механические параметрические колебания .....	90
Уравнение свободных колебаний. Общий случай .....	90
Параметрические колебания маятника .....	92
Параметрический резонанс в RLC колебательном контуре.....	95
<b>ЧАСТЬ II.....</b>	<b>97</b>
<b>Раздел 1. Уравнения в частных производных .....</b>	<b>97</b>
Уравнение диффузии.....	97
<b>Раздел 2. Численное решение уравнений параболического типа.</b>	
<b>Понятие о методе конечных разностей (МКР). Основные определения</b>	
<b>и конечно-разностные схемы.....</b>	<b>100</b>
Схема дискретизации .....	100
Некоторые способы аппроксимации дифференциальных операторов .....	102
Явная схема .....	103
Типы граничных условий для уравнения теплопроводности .....	105
Метод конечных разностей. Неявная схема .....	105
Решение системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей	
методом прогонки .....	107
Граничные условия для неявной конечно-разностной схемы .....	108
ГУ 1-го рода .....	108
ГУ 2-го рода .....	108
ГУ 3-го рода .....	109
Повышение точности численной аппроксимации уравнения.....	110
Повышение порядка точности аппроксимации граничных условий .....	112
Библиографический список .....	115