МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ГИСТЕРЕЗИСНОГО ТИПА

Составители:
М. Б. Зверева,
М. И. Каменский,
Е. В. Рачинский

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

Содержание

Упражнения.

1.1 Докажите, что всякая функция ограниченной вариации ограничена.

1.2 $u(t) = \mathrm{const} \Leftrightarrow \mathrm{Var}(u) = 0$.

1.3 Пусть $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}$, $u(t)$ — монотонная функция. Докажите, что $u(t)$ является функцией ограниченной вариации, причем $\mathrm{Var}(u) = |u(T) - u(0)|$.

1.4 Пусть $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ является функцией ограниченной вариации. Тогда $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$, где функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ не убывают на $[0,T]$.

1.5 Пусть функция $u(t)$ представляет собой ломаную в гильбертовом пространстве, т.е. существуют точки $0 = t_0^* < t_1^* < \ldots < t_N^* = T$ такие, что $u(t) = u_i + \left(\dfrac{t - t_i^*}{t_{i+1}^* - t_i^*}\right)(u_{i+1} - u_i)$, $t \in [t_i^*, t_{i+1}^*]$, где $u_i = u(t_i^*)$. Тогда $u(t)$ является функцией ограниченной вариации, причем $\mathrm{Var}(u) = \sum\limits_{i=0}^{N-1} \|u_{i+1} - u_i\|$.

1.6 Докажите, что непрерывная функция

$$u(t) = \begin{cases} t \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2t}\right), & t \in (0,1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

не является функцией ограниченной вариации на $[0,1]$.

1.7 Покажите, что произведение двух функций f и g ограниченной вариации есть снова функция ограниченной вариации, причем

$$Var(fg) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\| Var(g) + \sup_{x\in[a,b]} \|g(x)\| Var(f).$$

§2. Некоторые сведения из выпуклого анализа

Пусть $C \subset H$(ГП) — замкнутое выпуклое множество.

Напомним, что множество C называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Множество C — выпуклое, если $\forall\ x,\ y \in C$: отрезок $[x, y] \subset C$, где отрезок $[x, y]$ в ГП определяется как множество

$$[x, y] = \{\alpha x + (1 - \alpha)y,\ \alpha \in [0, 1]\}.$$

Пусть $x \in C$. Конусом нормалей в точке x ко множеству C будем называть множество

$$N_C(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, c - x\rangle \leqslant 0 \quad \forall c \in C\}.$$

Заметим, что если $x \in H$, и $C \subset H$ — замкнутое выпуклое множество, то существует единственный $y \in C$, минимизирующий расстояние от точки x до множества C: $(\mathrm{dist}(x, C))$, где

$$\mathrm{dist}(x, C) = \inf\{\|x - c\| : c \in C\}.$$

Такой элемент y называется проекцией элемента x на множество C и обозначается $y = \mathrm{proj}(x, C)$. Таким образом,

$$y = \mathrm{proj}(x, C) \Leftrightarrow \|x - y\| = \mathrm{dist}(x, C).$$

Пусть C_1 и C_2 — выпуклые замкнутые множества в H — ГП. Тогда хаусдорфовым расстоянием $h(C_1, C_2)$ между C_1 и C_2 называется

$$h(C_1, C_2) = \max\{\sup_{x \in C_2} \mathrm{dist}(x, C_1), \sup_{x \in C_1} \mathrm{dist}(x, C_2)\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $[x_1, x_2]$ *— отрезок в* H *(ГП). Функция* $l\colon [a, b] \subset \mathbb{R}^1 \to H$ *— непрерывная и имеет ограниченную вариацию, причем* $Var(l) \leqslant$

$\|x_1 - x_2\| + \nu$, *где* $\nu \geqslant 0$. *Пусть* $l(a) = y_1$; $l(b) = y_2$, *и* $\|y_1 - x_1\| \leqslant \delta$; $\|y_2 - x_2\| \leqslant \eta$, $\delta \geqslant 0$; $\eta \geqslant 0$ *и* $\nu + \delta + \eta \leqslant 1$. *Тогда хаусдорфово расстояние удовлетворяет неравенству*

$$h(l, [x_1, x_2]) \leqslant (3 + \|x_1 - x_2\|)\sqrt{\nu + \delta + \eta}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\delta = \eta = 0$. Тогда $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$. Покажем, что для любой точки $z \in l$ расстояние до $[x_1, x_2]$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{dist}(z, [x_1, x_2]) \leqslant (1 + \|x_1 - x_2\|)\sqrt{\nu}$.

Введем обозначения: $[x_1, x_2] = S$, $\|x_1 - x_2\| = |S|$. Требуется доказать, что $\operatorname{dist}(z, S) \leqslant (1 + |S|)\sqrt{\nu}$ для всех $z \in l$. Предположим противное, т.е. что найдется $z' \in l$ такой, что $\operatorname{dist}(z', S) > (1 + |S|)\sqrt{\nu}$.

Рассмотрим следующие случаи:

а) Пусть на S ближайшей к точке z' окажется x_1. Заметим, что $\operatorname{Var}(l) \geqslant \|x_1 - z'\| + \|z' - x_2\| > (1 + |S|)\sqrt{\nu} + |S| > \nu + |S|$, поскольку $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Но по условию $\operatorname{Var}(l) \leqslant \nu + |S|$. Получили противоречие. Аналогично может быть рассмотрен случай, когда x_2 ближайшая к z'.

б) Пусть x' — проекция z' на множество S. Тогда $\operatorname{dist}(z', S) = \|z' - x'\|$, и следовательно, $\|z' - x'\|^2 > (1 + |S|)^2\nu \geqslant \nu + 2|S|\nu \geqslant \nu^2 + 2\nu\|x_i - x'\|$. Поскольку

$$\operatorname{Var}(l) \geqslant \sum_{i=1}^{2} \|x_i - z'\| \geqslant \sum_{i=1}^{2} \sqrt{\|x_i - x'\|^2 + \|x' - z'\|^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{2} \sqrt{(\nu + \|x_i - x'\|)^2} = \sum_{i=1}^{2} (\nu + \|x_i - x'\|) = 2\nu + |S|,$$

то получаем противоречие с тем фактом, что $\operatorname{Var}(l) \leqslant \nu + |S|$, $\nu \geqslant 0$.

Таким образом, $\sup\limits_{z \in l} \operatorname{dist}(z, [x_1, x_2]) \leqslant (1 + \|x_1 - x_2\|)\sqrt{\nu}$.

С другой стороны, заметим, что любой элемент $x' \in S$ является ортогональной проекцией некоторого $z' \in l$. Более того, $\operatorname{dist}(x', l) \leqslant \|x' - z'\| = \operatorname{dist}(z', S) \leqslant (1 + |S|)\sqrt{\nu}$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\|y_1 - x_1\| \leqslant \delta \neq 0$, $\|y_2 - x_2\| \leqslant \eta \neq 0$. Воспользовавшись неравенством параллелограмма, получим, что

$$\big|\|x_1 - x_2\| - \|y_1 - y_2\|\big| \leqslant \|y_1 - x_1\| + \|y_2 - x_2\| \leqslant \delta + \eta \leqslant 1.$$

Тогда $\mathrm{Var}(l) \leqslant \|x_1 - x_2\| + \nu \leqslant \|y_1 - y_2\| + \delta + \eta + \nu$. Применим уже полученный ранее результат к отрезку $[y_1, y_2] = S'$. Имеем

$$h(l, S') \leqslant (1 + |S'|)\sqrt{\delta + \eta + \nu} \leqslant (2 + |S|)\sqrt{\delta + \eta + \nu},$$

поскольку $\big||S| - |S'|\big| \leqslant 1$, откуда $|S'| \leqslant |S| + 1$.

Воспользуемся неравенством треугольника, получим: $h(l, S) \leqslant h(l, S') + h(S', S)$. Поскольку $h(S', S) \leqslant \max \|x_i - y_i\| \leqslant \delta + \eta \leqslant \sqrt{\delta + \eta + \nu}$, то $h(l, S) \leqslant (3 + |S|)\sqrt{\delta + \eta + \nu}$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть отображение S действует из множества $D \subset H$ (ГП) в себя и является сжимающим. Обозначим через P множество неподвижных точек S. Предположим, что P содержит в себе замкнутый шар с центром в точке a и радиусом $r > 0$, т.е. $\overline{B}(a, r) \subset P$. Тогда для всех $x \in D$ верно*

$$\|x - S(x)\| \leqslant \frac{1}{2r}\left(\|x - a\|^2 - \|S(x) - a\|^2\right).$$

Доказательство. Если $x = S(x)$, то последнее неравенство очевидно. Пусть $x \neq S(x)$. обозначим $y = \dfrac{x - S(x)}{\|x - S(x)\|}$.

Заметим, что $\|y\| = 1$ и $x - S(x) = y\|x - S(x)\|$. Тогда, очевидно, элемент $a + ry \in \overline{B}(a, r)$. Поскольку $\overline{B}(a, r) \subset P$, то $a + ry$ — неподвижная точка отображения S, т.е. $S(a + ry) = a + ry$.

Так как S — сжимающее, то $\|S(a + ry) - S(x)\|^2 \leqslant \|a + ry - x\|^2$, откуда $\|a + ry - S(x)\|^2 \leqslant \|a + ry - x\|^2$, и значит

$$\frac{\|x - a\|^2 - \|S(x) - a\|^2}{2r} \geqslant \langle y, a - S(x)\rangle - \langle y, a - x\rangle = \langle y, x - S(x)\rangle = \|x - S(x)\|,$$

ђqdbqау bЂ dеdЂbУзе d еэаbсэ Зdddуdуэ

что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Пусть C — замкнутое выпуклое множество в H — ГП, причем $\overline{B}(a,r) \subset C$. Тогда для всех $x \in H$ верно*

$$\|x - \mathrm{proj}(x,C)\| \leqslant \frac{1}{2r}\left(\|x-a\|^2 - \|\mathrm{proj}(x,C) - a\|^2\right).$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $S(x) = \mathrm{proj}(x,C)$. Оно является сжимающим (докажите в качестве упражнения!). Применив предыдущую теорему, получим требуемое.

Теорема 5. *Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — замкнутые выпуклые множества в H — ГП, причем все они содержат в себе замкнутый шар $\overline{B}(a,r)$ $(r > 0)$. Тогда, если $x_0 \in H$ и точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что $x_i = \mathrm{proj}(x_{i-1}, C_i)$, то*

$$\|x_0 - a\| \geqslant \|x_1 - a\| \geqslant \ldots \geqslant \|x_n - a\|,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i - x_{i-1}\| \leqslant \frac{1}{2r}\left(\|x_0-a\|^2 - \|x_n - a\|^2\right) \leqslant \frac{1}{2r}\|x_0 - a\|^2.$$

Доказательство. Заметим, что $\|x_1 - a\| = \|\mathrm{proj}(x_0, C_1) - \mathrm{proj}(a, C_1)\| \leqslant \leqslant \|x_0 - a\|$, поскольку отображение proj является сжимающим. Аналогично, $\|x_n - a\| \leqslant \|x_0 - a\|$. По предыдущей теореме, в силу $\overline{B}(a,r) \subset C_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$, имеем

$$\|x_{i-1} - \mathrm{proj}(x_{i-1,C})\| = \|x_i - x_{i-1}\| \leqslant \frac{1}{2r}(\|x_{i-1} - a\|^2 - \|x_i - a\|^2).$$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i - x_{i-1}\| \leqslant \dfrac{1}{2r}\|x_0 - a\|^2$, что и требовалось доказать.

Упражнения

Пусть $H = \mathbb{R}^2$, $C = \{(x,0) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ (для номеров 2.1—2.3).

2.1 Покажите, что $N_C((0,0)) = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 \leqslant 0, \xi_2 \in \mathbb{R}\}$.

ŋqdqʎеʎ bĘ dеdĘbʎзе d еɔɑbɔʎ Ɉqdqʎqʎè