

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

П 83

П 83 **Протасов Ю.М.**

Математический анализ : учеб. пособие / Ю.М. Протасов. — 3-е изд., стер. — Москва : ФЛИНТА, 2024. — 164 с. — ISBN 978-5-9765-1234-4. — Текст : электронный.

Учебное пособие отражает основное содержание второго раздела обще-научной дисциплины «Математика», являющейся федеральным компонентом государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальностям «Экономика» и «Управление». Пособие включает материал по математическому анализу.

Предназначено для помощи студентам в обобщении и конкретизации знаний по данной дисциплине, закреплении изученного материала и подготовке к сдаче экзамена.

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

ISBN 978-5-9765-1234-4

© Протасов Ю.М., 2021

© Издательство «ФЛИНТА», 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |    |
|---|----|
| <b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....  | 7  |
| <b>Тема 1. МНОЖЕСТВА</b> .....  | 8  |
| 1.1. Понятие множества. Способы задания множеств .....  | 8  |
| 1.2. Операции над множествами .....   | 9  |
| 1.3. Числовые множества .....   | 11 |
| 1.4. Точная верхняя и точная нижняя грани множества .....   | 13 |
| 1.5. Абсолютная величина действительного числа .....  | 14 |
| <b>Тема 2. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ</b> .....  | 17 |
| 2.1. Понятие числовой последовательности .....  | 17 |
| 2.2. Предел последовательности .....  | 17 |
| 2.3. Существование предела у монотонной<br>ограниченной последовательности<br>(критерий Вейерштрасса) ..... | 18 |
| 2.4. Число $\varepsilon$ (второй замечательный предел) .....  | 19 |
| 2.5. Бесконечно малые (б.м.) и бесконечно большие (б.б.)<br>последовательности .....                        | 20 |
| 2.6. Арифметические операции с пределами .....  | 21 |
| 2.7. Раскрытие неопределенностей .....  | 23 |
| 2.8. Теорема о «зажатой» последовательности .....   | 25 |
| 2.9. Лемма о вложенных отрезках .....   | 25 |
| 2.10. Лемма Больцано — Вейерштрасса .....   | 26 |
| <b>Тема 3. ФУНКЦИЯ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА</b> .....   | 28 |
| 3.1. Понятие функции. Основные свойства функций .....   | 28 |
| 3.2. Классификация функций .....  | 32 |
| 3.3. Преобразование графиков функций .....  | 33 |

|   |    |
|---|----|
| <b>Тема 4. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ</b>                         | 41 |
| 4.1. Понятие предела функции  | 41 |
| 4.2. Бесконечно малые (б.м.) и бесконечно большие (б.б.) функции      | 43 |
| 4.3. Основные теоремы о пределах                                      | 45 |
| 4.4. Непрерывность функции  | 47 |
| 4.5. Замечательные пределы  | 51 |
| <b>Тема 5. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ</b>                                    | 55 |
| 5.1. Понятие производной  | 55 |
| 5.2. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции         | 55 |
| 5.3. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к кривой | 56 |
| 5.4. Механический смысл производной                                   | 57 |
| 5.5. Основные правила дифференцирования функций                       | 58 |
| 5.6. Формулы дифференцирования простейших элементарных функций        | 61 |
| 5.7. Производные высших порядков                                      | 63 |
| <b>Тема 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ</b>                                   | 65 |
| 6.1. Понятие дифференциала функции                                    | 65 |
| 6.2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях              | 67 |
| 6.3. Понятие о дифференциалах высших порядков                         | 69 |
| <b>Тема 7. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ</b>          | 71 |
| 7.1. Теорема Ферма  | 72 |
| 7.2. Теорема Ролля  | 72 |
| 7.3. Теорема Коши   | 73 |
| 7.4. Теорема Лагранжа   | 74 |
| 7.5. Правило Лопиталя   | 75 |

|   |                |
|---|----------------|
| <b>Тема 8. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА .....</b>  | <b>78</b>      |
| 8.1. Формула Тейлора для многочлена .....   | 78             |
| 8.2. Формула Тейлора для функции .....  | 79             |
| 8.3. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора .....   | 81             |
| 8.4. Применение формулы Тейлора<br>в приближенных вычислениях .....                                   | 82             |
| 8.5. Применение формулы Тейлора для вычисления пределов .....   | 83             |
| <br><b>Тема 9. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ<br/>И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ .....</b>                               | <br><b>84</b>  |
| 9.1. Возрастание и убывание функций .....   | 84             |
| 9.2. Условия экстремума функций .....   | 85             |
| 9.3. Выпуклость и вогнутость графика функции .....  | 87             |
| 9.4. Точки перегиба .....   | 88             |
| 9.5. Асимптоты графика функции .....  | 89             |
| 9.6. Общая схема исследования функций и построения<br>их графиков .....                               | 91             |
| <br><b>Тема 10. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ .....</b>   | <br><b>94</b>  |
| 10.1. Область определения, линии и поверхности уровня .....   | 94             |
| 10.2. Частные производные и дифференциал первого порядка .....  | 96             |
| 10.3. Производная по направлению. Градиент .....  | 98             |
| 10.4. Экстремум функции нескольких переменных .....   | 100            |
| 10.5. Условный экстремум .....  | 103            |
| <br><b>Тема 11. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ .....</b>   | <br><b>106</b> |
| 11.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл .....   | 106            |
| 11.2. Свойства неопределенного интеграла, таблица<br>интегралов простейших элементарных функций ..... | 107            |
| 11.3. Независимость вида неопределенного интеграла<br>от выбора аргумента .....                       | 109            |
| 11.4. Методы интегрирования функций .....   | 110            |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Тема 12. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</b> .....   | 118 |
| 12.1. Понятие определенного интеграла .....   | 118 |
| 12.2. Свойства определенного интеграла .....  | 119 |
| 12.3. Теорема о среднем .....   | 120 |
| 12.4. Производная интеграла по верхнему пределу .....   | 121 |
| 12.5. Формула Ньютона—Лейбница .....  | 122 |
| 12.6. Геометрические приложения определенного интеграла .....                                   | 122 |
| 12.7. Несобственные интегралы .....   | 124 |
| <b>Тема 13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b> .....  | 127 |
| 13.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.<br>Основные понятия .....                        | 127 |
| 13.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения<br>первого порядка .....                          | 129 |
| 13.3. Линейные дифференциальные уравнения<br>второго порядка с постоянными коэффициентами ..... | 138 |
| <b>Тема 14. РЯДЫ</b> .....  | 145 |
| 14.1. Числовые ряды .....   | 145 |
| 14.2. Степенные ряды .....  | 155 |
| <b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....   | 162 |