

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

**В. С. Климов**

**ОСНОВЫ**  
**КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА**  
*Учебное пособие*

*Рекомендовано Научно-методическим советом университета для  
студентов, обучающихся по специальности Прикладная математика и  
информатика*

Ярославль 2010

УДК 517  
ББК В16я73  
К49

*Рекомендовано  
Научно-методическим советом университета  
в качестве учебного издания. План 2010 года*

**Рецензенты:**

Кафедра прикладной математики и вычислительной техники ЯГТУ;  
Е. И. Смирнов, доктор педагогических наук, профессор, заведующий  
кафедрой математического анализа ЯГПУ

К49 **Климов, В. С.** Основы комплексного анализа: Учебное пособие / В. С. Климов; Яросл. гос. ун-т. им. П. Г. Демидова — Ярославль: ЯрГУ, 2010. — 96 с.  
ISBN 978-5-8397-

Пособие «Основы комплексного анализа» содержит следующие разделы дисциплины «Математический анализ»: дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного; степенные ряды; ряды Лорана и теория вычетов; начала операционного исчисления; введение в теорию конформных отображений.

Предназначено для студентов университетов, обучающихся по специальности 010501.65 Прикладная математика и информатика (дисциплина «Математический анализ», блок ОПД), очной формы обучения. Пособие может быть полезным и для студентов университетов, обучающихся по специальности 010100.65 Математика.

ISBN 978-5-8397-

УДК 517  
ББК В16я73

©Ярославский государственный университет, 2010

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>1 Производная и интеграл</b>	<b>7</b>
1.1 Предварительные сведения . . . . .	7
1.2 Производные функций комплексного переменного . . . . .	11
1.3 Интеграл по комплексной переменной . . . . .	16
1.4 Формула Коши и её следствия . . . . .	21
<b>2 Степенные ряды</b>	<b>29</b>
2.1 Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций . . . . .	29
2.2 Степенные ряды и ряд Тейлора . . . . .	32
2.3 Продолжение аналитических функций . . . . .	36
<b>3 Ряды Лорана и теория вычетов</b>	<b>41</b>
3.1 Разложение функции в ряд Лорана . . . . .	41
3.2 Изолированные особые точки . . . . .	45
3.3 Вычет аналитической функции . . . . .	49
3.4 Интегралы и вычеты . . . . .	53
<b>4 Начала операционного исчисления</b>	<b>63</b>
4.1 Преобразование Лапласа . . . . .	63
4.2 Формула обращения . . . . .	67
4.3 Приложения преобразования Лапласа . . . . .	71
<b>5 Конформные отображения</b>	<b>75</b>
5.1 Свойства конформных отображений . . . . .	75
5.2 Дробно-линейная функция . . . . .	79
5.3 Элементарные функции и конформные отображения . . . . .	84
5.4 Комплексный анализ (сводка формул) . . . . .	90
<b>Литература</b>	<b>95</b>

# Предисловие

Учебное пособие содержит изложение разделов математического анализа, изучаемых студентами третьего курса университетов специальности Прикладная математика и информатика.

Весь материал разбит на пять глав. Первая глава посвящена дифференцированию и интегрированию функций комплексного переменного. В последующих двух главах изучаются степенные ряды и ряды Лорана. Основное внимание в третьей главе уделено теории вычетов и её применениям к вычислению интегралов. В четвертой главе приводятся элементы операционного исчисления. Намечены пути приложения развитой теории к решению дифференциальных и интегральных уравнений. Заканчивает пособие пятая глава, в которой излагаются начала теории конформных отображений и рассматриваются примеры иллюстративного характера.

Из сказанного выше следует, что по содержанию данное пособие представляет не слишком обширный фрагмент теории функций комплексного переменного – классической учебной дисциплины, по которой имеется богатая учебная литература. Существующие учебные руководства поражают современного студента обилием фактов, многими сотнями превосходно написанных страниц, рассчитанными на энтузиаста, готового отдать изучению комплексного анализа если не всю жизнь, то значительную её часть. Увы, реалии таковы, что в учебных планах студентов-прикладников отсутствует даже сама дисциплина: теория функций комплексного переменного. Элементы этой прекрасной науки составляют лишь часть программы по математическому анализу. Лектору приходится выкраивать часы на изложение теории аналитических функций, иногда в ущерб классическому анализу.

Автор счёл необходимым предпослать основному тексту вводный параграф, содержащий в сжатой форме перечень предварительных сведений о комплексных числах. Предполагается, что читатель уже знаком с понятием комплексного числа, поэтому здесь следует говорить скорее о фиксации терминологии, чем о разъяснении известных фактов.