

AUSGEWÄHLTE KAPITEL

DER ZAHLENTHEORIE.

VORLESUNG,
GEHALTEN IM WINTERSEMESTER 1895/96
UND SOMMERSEMESTER 1896

VON

F. KLEIN.

AUSGEARBEITET VON
A. SOMMERFELD UND PH. FURTWÄNGLER.

ZWEITER, UNVERÄNDERTER ABDRUCK.

LEIPZIG 1907.
IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER.

Vorbemerkung zum Neudruck von 1907.

Indem ich die zahlentheoretischen Studien, die ich in meiner Vorlesung von 1895—96 behandelte, erneut der Öffentlichkeit unterbreite, möchte ich den Gedanken voranstellen, daß die nähere Untersuchung derjenigen Figuren, die in der Theorie der automorphen Funktionen auftreten, von selbst zahlentheoretischen Charakter annimmt, die entstehenden zahlentheoretischen Überlegungen aber dadurch, daß sie sich unmittelbar auf ein anschauliches Substrat beziehen, besonders zugänglich erscheinen.

Die solcherweise hervorkommende Verbindung von Geometrie und Zahlentheorie wird in den vorliegenden Studien an einer der einfachsten automorphen Figuren, dem Parallelgitter der Ebene, zur Geltung gebracht, wobei die Theorie der binären quadratischen Formen, einschließlich der Kompositionstheorie dieser Formen, ihre volle anschauliche Darlegung findet, insbesondere aber die Beziehung zur komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen überzeugend hervortritt. Übrigens wird diese Darlegung der Lehre von der komplexen Multiplikation als eine nicht unerwünschte Ergänzung der einschlägigen Entwicklungen in den von Fricke und mir herausgegebenen „Vorlesungen über elliptische Modulfunktionen“ angesehen werden.

Ich hoffe, daß diese ganze Darstellung, entsprechend ihrer Beschränkung auf wohlumgrenzte, relativ elementare Fragen, auch fernerhin manchem als Einleitung in höhere zahlentheoretische Studien willkommen sein wird. Ich erinnere nur daran, daß das Parallelgitter in Ebene und Raum die Grundlage auch von Minkowskis Geometrie der Zahlen bildet, und möchte andererseits der Überzeugung Ausdruck geben, daß ein Verfolg der von mir gegebenen Auffassung der Kompositionstheorie einen bequemen Zugang zu der modernen Theorie der algebraischen Zahlkörper liefert.

GÖTTINGEN, 25. Jan. 1907.

KLEIN.

HEFT I.

AUSGEARBEITET VON A. SOMMERFELD.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.	Seite
Die Punktgitter in der Ebene	1
Arithmetische Darlegung des Euklidischen Algorithmus bezw. der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung	9
Zugehörige geometrische Interpretation	17
Entwicklung rationaler Brüche, Erzeugung aller unimodularen Substitutionen durch S und T, bezw. S und S'	25
Der Satz von Lagrange über die relativen Minima der Linearformen	39
 I. Hauptteil: Die Reduktionstheorie der einzelnen binären quadratischen Form.	
1. Geometrische Vorbegriffe.	
Das System der Geometrie	50
Die Pseudometrik, der elliptische Fall	57
Der hyperbolische und der parabolische Fall	71
Bedeutung des Problems der zahlentheoretischen Äquivalenz zweier binärer quadratischer Formen	82
2. Die Reduktionstheorie im parabolischen Falle	93
3. Die Reduktionstheorie im hyperbolischen Falle.	
Die Einführung der natürlichen Umrisspolygone, Definition der reduzierten Formen	103
Serien zusammengehöriger reduzierter Formen	113
Arithmetische Bestimmungen hierfür	120
Die ganzzahligen Formen, insbesondere ihre regulären Automorphismen. . .	128
Beziehungen zur Pellschen Gleichung, der Pellsche Winkel	141
Ganzzahlige Formen derselben Diskriminante, Endlichkeit der Klassenzahl	149
Zahlenbeispiel $D = 40$	152
4. Die Reduktionstheorie im elliptischen Falle	165