

[section]

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. П. Г. ДЕМИДОВА

В. Г. ДУРНЕВ

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Рекомендовано Учебно-методическим советом по математике и механике  
Учебно-методического объединения по классическому университетскому  
образованию РФ*

*в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальности "Математика" и по направлениям  
"Математика" и "Математика. Прикладная математика."*

ЯРОСЛАВЛЬ 2009

УДК 51 + 519.2  
ББК В 12 я 73  
Д 84

*Рекомендовано*  
*Редакционно-издательским советом университета*  
*в качестве учебного издания. План 2009 года*

Рецензенты:  
кафедра алгебры и геометрии Тульского государственного  
педагогического университета им. Л. Н. Толстого;  
доктор физ.-матем. наук, профессор Д. И. Молдаванский;  
доктор физ.-матем. наук, профессор С. П. Струнков.

**Дурнев, В.Г.** Элементы теории множеств и математической логики: учеб.  
пособие / В. Г. Дурнев; Яросл. гос. ун-т. им. П. Г. Демидова. Ярославль, 2009.  
457 с.  
ISBN 978-5-8397-0660-6

В учебном пособии излагаются основные понятия теории множеств, логики высказываний, исчисления высказываний, логики предикатов и исчисления предикатов.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 510100 "Математика" и 511200 "Математика. Прикладная математика" и по специальностям 010100 "Математика" и 090102 "Компьютерная безопасность". Оно может быть использовано при изучении дисциплин "Введение в теорию множеств и логическую символику", "Математическая логика", "Математическая логика и теория алгоритмов" и "Дискретная математика и математическая логика" (блок ОПД, ЕН), а также специальных дисциплин.

Библиогр.: 48 назв.

ISBN 978-5-8397-0660-6  
УДК 51 + 519.2  
ББК В 12 я 73  
Д 84

©Ярославский государственный университет  
им. П. Г. Демидова, 2009  
©В. Г. Дурнев, 2009

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ</b>	<b>11</b>
1.1. Множества и операции над ними . . . . .	11
1.2. Соответствия, отношения и функции . . . . .	18
1.3. Некоторые специальные отношения . . . . .	31
1.4. Равномощность множеств . . . . .	42
1.5. Конечные и счетные множества . . . . .	49
1.6. Множества мощности континуум . . . . .	54
1.7. Операции над кардинальными числами . . . . .	59
1.8. Вполне упорядоченные множества . . . . .	61
1.9. Натуральные числа. Системы Пеано . . . . .	84
1.9.1. Системы Пеано . . . . .	84
1.9.2. Рекурсивные определения в системах Пеано . . . . .	89
1.9.3. Определения сложения и умножения натуральных чисел . . . . .	92
1.10. Некоторые приложения аксиомы выбора . . . . .	94
<b>II. ЛОГИКА И ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ</b>	<b>111</b>
2.1. Алфавиты. Слова . . . . .	111
2.2. Логика Высказываний . . . . .	113
2.3. Исчисление Высказываний . . . . .	131
2.4. Дополнительные вопросы Логике и Исчисления Высказываний . . . . .	152
2.5. Алгебра Линденбаума для Исчисления Высказываний . . . . .	163
2.6. Метод резолюций для Логике Высказываний . . . . .	164
2.7. Независимость систем аксиом . . . . .	167
2.8. Исчисление Секвенций . . . . .	173
2.9. Другие аксиоматизации для Логике Высказываний . . . . .	178
2.10. Интуиционистское Исчисление Высказываний . . . . .	182
<b>III. ЛОГИКА И ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ</b>	<b>199</b>
3.1. Языки первого порядка . . . . .	199
3.2. Логика Предикатов . . . . .	206
3.3. Фильтрованные произведения . . . . .	228
3.4. Понятие о нестандартном, или неархимедовом, анализе . . . . .	236
3.5. Исчисление Предикатов . . . . .	242
3.5.1. Логические аксиомы и правила вывода . . . . .	242
3.5.2. Теорема дедукции . . . . .	250
3.5.3. Теорема К. Геделя о полноте . . . . .	265
3.6. Логика первого порядка с равенством . . . . .	285
3.7. Исчисление Предикатов с равенством . . . . .	304
3.7.1. Логические аксиомы и правила вывода . . . . .	304
3.7.2. Теорема адекватности для Исчисления Предикатов с равенством . . . . .	309

3.8. Аксиоматическая теория множеств и формальная арифметика . .	314
3.9. Теоремы Д. Кенига и Ф. Рамсея . . . . .	319
3.10. Разрешимость логики одноместных предикатов . . . . .	339
3.11. Неразрешимость логики двуместных предикатов . . . . .	346
<b>IV. ДОПОЛНЕНИЕ</b>	<b>359</b>
4.1. Булевы алгебры . . . . .	359
4.2. Фильтры на булевых алгебрах . . . . .	366
4.3. Псевдобулевы алгебры . . . . .	370
4.4. Из истории математики и логики . . . . .	374
4.4.1. Из истории математики . . . . .	374
4.4.2. Из истории логики . . . . .	387
<b>Послесловие</b>	<b>408</b>
<b>Литература</b>	<b>409</b>

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Трудно, на наш взгляд, оспорить утверждение, что *значительная часть математики XX века базировалась на теоретико-множественном фундаменте*. И в начале XXI века, как нам кажется, ситуация не претерпела коренных изменений. Теория множеств лежит в основе большинства современных математических дисциплин, включенных в учебные планы для университетов по математическим специальностям. Элементарные сведения по теории множеств входят в программы курсов алгебры, математического анализа, функционального анализа, топологии, теории вероятностей и т. д. Традиционно каждый лектор, руководствуясь, прежде всего, программой соответствующей дисциплины и своими личными вкусами, выбирает из обширного теоретико-множественного материала то, что ему кажется необходимым, излагает это со своей точки зрения и с использованием собственной или принятой в преподаваемой им дисциплине системы обозначений. Достаточно цельной теоретико-множественной картины при этом, как правило, не возникает. Из математической логики обычно используется лишь система обозначений — логическая символика.

XX век был периодом бурного развития математической логики, в рамках которой аксиоматический метод изложения математических теорий, ведущий свое начало от древнегреческих математиков, был доведен до своего логического завершения — были формализованы, выражены на подходящем формальном языке, не только основные положения ряда математических теорий, но и логические средства доказательства теорем в этих теориях. *Была установлена возможность формализации самой логики математических рассуждений, что позволило сделать процесс доказательства математических теорем объектом математического изучения*. В этот же период установилась тесная связь математической логики с исследованиями в области оснований математики, с ее философскими вопросами. В рамках математической логики была разработана теория формальных языков, что сыграло, в частности, важнейшую роль при разработке языков программирования. *Именно в математической логике было выработано математическое уточнение интуитивного понятия алгоритма*, которым к тому времени математики пользовались уже более двух тысяч лет. Это позволило установить *существование неразрешимых алгоритмических проблем* во многих разделах математики. *В настоящее время математическая логика имеет свой предмет и методы исследования*, играет важную роль как в различных разделах математики, так и в ее приложениях,