ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Физико-математические науки

Математика

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Яндаров В.О.*, кандидат физико-математических наук, профессор, советник ректора Грозненского государственного нефтяного технического университета им. академика М.Д. Миллионщикова*

К ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНО, КВАЗИРЕГУЛЯРНО ЗАМКНУТЫХ И НЕТОТАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В статье рассматриваются и доказываются теоремы, относящиеся к проблемам банаховых пространств.

Ключевые слова: *банахово пространство, подпространство, сопряженность.*

AN THE THEORY OF REGULARITY, KWASI-REGULARITY AND TOTALITY SUBSPACES OF CONJUGATE SPACES

This article describes and proves new theorems related to solving the problem of banach spaces.

Keywords: *banach space, subspace, conjugate.*

Как обычно (см., например, [1, 2]), под X_1 и X понимаются бесконечномерные банаховы пространства над одним и тем же числовым полем, скажем, над полем $R=(-\infty, +\infty)$. Через $W_x(X_1)$ обозначается относительное пополнение X_1 относительно X, если X_1 слабо компактно и плотно вложено в X [1, 2]. Если $X_1 \in E(X)$, т.е. X_1 слабо компактно и плотно вложено в X, то через Z^* обозначается замыкание X^*, сопряженного к X, в пространстве X_1^*, сопряженном к X_1. Пространство Z^* не всегда является сопряженным к некоторому замкнутому подпространству $Y \subset X_1$.

С. Банах (см., например, [3, 4]) ввел понятие регулярно замкнутого подпространства ((*) – замкнутого или слабо* замкнутого): подпространство L в X_1^*, сопряженном к X_1, называется регулярно замкнутым в X_1^*, если для любого элемента $x^* \in X_1^* \backslash L$ существует такой элемент $x_0 \in X_1$, что выполняются равенства

$$x^*(x_0)=1, \;\; z^*(x_0)=0 \quad \forall z^* \in L$$

Автор данной статьи ввел следующее понятие: пусть $X_1 \in E(X)$. Подпространство $L \subset X_1^*$ называется **квазирегулярно** замкнутым в пространстве X_1^*, если для любого элемента $x^* \in X_1^* \backslash L$ существует такой элемент $x_0 \in W_x(X_1)$, что имеют место равенства (1).

С помощью понятий регулярно и квазирегулярно замкнутых подпространств были исследованы важные свойства банаховых пространств и сопряженных к ним (см., например, [4–7]).

Подпространство $Y \subset X_1^*$ называется на X_1 тотальным [1; 4–7], если из того, что для $x \in X_1$ выполняется равенство $x(y)=0 \;\; \forall y \in Y$, вытекает, что x – нуль-элемент в X_1. Отсюда ясно, что подпространство $Y \subset X_1^*$ не тотально на X_1, если существует ненулевой элемент $y \in X_1$ такой, что $y(x^*)=0 \quad \forall x^* \in Y$.

Из второго равенства в (1) вытекает, что подпространство L можно считать подмножеством в ядре $\mathrm{Ker}x_0 \subset X_1^*$ элемента $x_0 \in X_1$, рассматриваемого как линейный непрерывный функционал, определенный на X_1^*:$L \subset \mathrm{Ker}x_0 \subset X_1^*$. Кроме того, в силу первого равенства в (1) элемент x^*, удовлетворяющий равенству $x^*(x_0)=1$, не принадлежит $\mathrm{Ker}x_0$. Если речь идет о квазирегулярно замкнутом подпространстве L /в этом случае во втором равенстве (1) $x_0 \in W_x(X_1)$; предполагается, что x_0 – линейный непрерывный функционал на X_1^*, хотя бы применяя теорему Хану–Банаха (см., например, [3, 8–10])/, то замечание, сделанное выше относительно регулярно замкнутого подпространства L, можно сделать и относительно квазирегулярно замкнутого подпространства, т. е. регулярно или квазирегулярно замкнутое подпространство $Y \subset X_1^*$ можно рассматривать как подпространство регулярно или квазирегулярно замкнутого гиперподпространства-ядра в X_1^*, содержащего Y. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы подпространство $Y \subset X_1^*$ было регулярно (квазирегулярно) замкнутым в X_1^*, необходимо и достаточно, чтобы существовало гиперподпространство $Y_1 \subset X_1^*$, содержащее Y и такое, что Y_1 регулярно (квазирегулярно) замкнуто в X_1^*.

Доказательство. Необходимость. Пусть подпространство $Y \subset X_1^*$ регулярно замкнуто в X_1^*, т. е. замкнуто в топологии $\sigma(X_1^*, X_1)$ [8]: $\forall x^* \in X_1^* \setminus Y$ существует элемент $x_0 \in X_1$ такой, что $x^*(x_0)=1$, $x_0(Y)=0$. Из второго равенства вытекает, что подпространство $Y \subset X_1^*$ можно считать гиперподпространством-ядром в X_1^*:$Y=\mathrm{Ker}x_0$ ($x_0 \in X_1$, где X_1 естественно вложено в X_1^{**}, второе сопряженное к X_1). Тогда $\mathrm{Ker}x_0$ является регулярно замкнутым подпространством в X_1^*.

Достаточность. Пусть $\mathrm{Ker}x_0=Y$– ядро ненулевого элемента $x_0 \in X_1$ (X_1 естественно вложено в X_1^{**}). Тогда по теореме Хана–Банаха [3, 8–10]) для любого $x^* \in X_1^* \setminus Y$ существует элемент $x^{**} \in X_1^{**}$ такой, что $x^{**}(x^*)=1$, $x^{**}(Y)=0$. Так как $Y=\mathrm{Ker}x_0$, то из равенства $x^{**}(Y)=0$ вытекает существование такого числа λ, что $x^{**}=\lambda x_0$, т. е. $x^{**} \in X_1$. Следовательно, Y – регулярно замкнуто вместе с любым подпространством в X_1^*, содержащимся в $\mathrm{Ker}x_0$. Теорема 1 аналогично рассматривается и для квазирегулярных подпространств в X_1^*. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Для того чтобы собственное замкнутое подпространство $Y \subset X_1^*$ было регулярно замкнуто в X_1^*, необходимо и достаточно, чтобы Y было не тотально на X_1.

Доказательство. Необходимость. Если $Y \subset X_1^*$ регулярно замкнуто в X_1^*, то по определению этой замкнутости для $\forall x^* \in X_1^* \setminus Y$ существует ненулевой элемент $x_0 \in X_1$ такой, что для любого $y \in Y$ выполняются равенства

$$x^*(x_0)=1, \quad x_0(y)=0$$

Из второго равенства следует, что $Y \subset X_1^*$ не тотально на X_1.

Достаточность. Пусть собственное замкнутое подпространство $Y \subset X_1^*$ не тотально на X_1: существует ненулевой элемент $x_0 \in X_1$ такой, что $x_0(Y)=0$. Ясно, что $\mathrm{Ker}x_0 \subset X_1^*$ содержит подпространство Y: $\mathrm{Ker}x_0 \supset Y$. Тогда $\mathrm{Ker}x_0$ не тотально на X_1. Если бы это было не так, т. е. если бы $\mathrm{Ker}x_0$ было бы тотально на X_1, то элемент x_0 был бы нуль-элементом в X_1, что противоречит предположению о том, что x_0 – ненулевой элемент в X_1. Следовательно, $\mathrm{Ker}x_0 \subset X_1^*$ не тотально на X_1. Тогда по теореме 2 в [6] ядро $\mathrm{Ker}x_0 \subset X_1^*$ регулярно замкнуто. Очевидно, тогда регулярно замкнуто на X_1 любое замкнутое подпространство $Y \subset \mathrm{Ker}x_0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы собственное замкнутое подпространство $Y \subset X_1^*$ было квазирегулярно замкнуто в X_1^*, необходимо и достаточно, чтобы Y было не тотально на $W_x(X_1)$.

<u>Доказательство</u>. Н е о б х о д и м о с т ь. По определению квазирегулярного подпространства $Y \subset X_1^*$ для любого $x^* \in X_1^* \backslash Y$ существует ненулевой элемент $x_0 \in W_x(X_1)$ такой, что: $x^*(x_0)=1$, $x_0(Y)=0$. Из второго равенства следует, что Y не тотально на $W_x(X_1)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть замкнутое подпространство $Y \subset X_1^*$ не тотально на $W_x(X_1)$. Обозначим через $\mathrm{Ker}x_0$ гиперподпространство – ядро элемента $x_0 \in W_x(X_1)$ в X_1^*. Очевидно, что $\mathrm{Ker}x_0 \supset Y$. Ясно, что если Y не тотально на $W_x(X_1)$, то Y квазирегулярно замкнуто в X_1^* как подпространство в $\mathrm{Ker}x_0 \subset X_1^*$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. С. 400.
2. *Яндаров В.О.* Пространства Розенталя и линейные непрерывные операторы. – М.: Компания Спутник+, 2007. С. 95.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 859.
4. *Яндаров В.О.* Решение одной проблемы С. Банаха// Вестник Академии наук ЧР. – Грозный, 1994, вып. 1. С. 24–39.
5. *Яндаров В.О.* Сопряженность, рефлексивность и квазирегулярность банаховых пространств// Актуальные проблемы современной науки. – 2008, № 1. С. 107–122.
6. *Яндаров В.О.* Регулярность, нетотальность и рефлексивность в банаховых пространствах. Проблема С. Банаха// Естественные и технические науки. – 2010, № 5. С. 26–35.
7. *Яндаров В.О.* Некоторые свойства банаховых пространств и их связь. Проблема С. Банаха// Труды Грозн. нефт. ин-та им. акад. М.Д. Миллионщикова. – Грозный, 2009, вып. 9. С. 72–86.
8. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. С. 410.
9. *Садовничий В.А.* Теория операторов. – М.: Дрофа, 2001. С. 382.
10. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. С. 496.