

УДК 517.3(075.8)
Р 816

Рецензенты:
д-р техн. наук, доц. *Е.В. Чимитова*
канд. техн. наук *И.М. Ступаков*

Работа подготовлена на кафедре прикладной математики

Рояк С.Х.

Р 816 Интегральное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / С.Х. Рояк. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2020. – 136 с.

ISBN 978-5-7782-4336-1

В настоящем учебном пособии излагаются основные разделы интегрального исчисления функций одной переменной. Пособие содержит большое количество примеров и может быть рекомендовано как для самостоятельного изучения курса, так и в качестве расширенного конспекта лекций.

Для студентов I и II курса всех специальностей факультета прикладной математики и информатики.

УДК 517.3(075.8)

ISBN 978-5-7782-4336-1

© Рояк С.Х., 2020

© Новосибирский государственный
технический университет, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Неопределенный интеграл	7
1.1. Первообразная и неопределенный интеграл	7
1.2. Основные методы интегрирования	11
1.2.1. Интегрирование заменой переменной (подстановкой)	11
1.2.2. Интегрирование по частям	13
1.3. Интегрирование рациональных выражений	15
1.3.1. Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей	15
1.3.2. Интегрирование рациональной дроби	20
1.3.3. Метод Остроградского	24
1.4. Интегрирование некоторых иррациональных выражений	29
1.4.1. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей	30
1.4.2. Интегрирование биномиальных дифференциалов	31
1.4.3. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$. Подстановки Эйлера	34
1.4.4. Интегралы вида $\int \frac{R(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$	38
1.5. Интегрирование тригонометрических выражений	44
1.5.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$	44
1.5.2. Интегралы вида $\int \sin^s x \cos^r x dx$	46
1.5.3. Интегралы вида $\int \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx$, $\int \sin(\alpha x) \sin(\beta x) dx$, $\int \cos(\alpha x) \cos(\beta x) dx$	47
1.5.4*. Частные случаи интегрирования тригонометрических дифференциалов	49
1.5.5. Интегралы вида $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$	51
1.5.6. Интегралы от трансцендентных функций, вычисляющиеся с помощью интегрирования по частям	52

1.5.7. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 \pm x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$.

Тригонометрические и гиперболические подстановки 52

1.6. Общие замечания об интегрировании.

Неберущиеся интегралы 55

Глава 2. Определенный интеграл 56

2.1. Интегральные суммы. Интегрируемость 56

2.2. Верхние и нижние суммы 57

2.3. Классы интегрируемых функций 62

2.4. Свойства определенного интеграла 66

2.5. Существование первообразной для непрерывной функции 73

2.6. Основные методы интегрирования 74

2.6.1. Формула Ньютона-Лейбница 74

2.6.2. Интегрирование кусочно-заданной функции 75

2.6.3. Формула интегрирования по частям 76

2.6.4. Замена переменной под знаком определенного интеграла 77

2.6.5. Интегрирование по симметричному промежутку.

Симметризация определенного интеграла 79

2.6.6. Интегрирование периодических функций
по полному периоду 80

2.6.7. *Гиперболические подстановки 81

2.7. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме 84

Глава 3. Геометрические приложения Определенного Интеграла 86

3.1. Длина дуги кривой 86

3.2. Дифференциал дуги 91

3.3. Площадь плоской фигуры 91

3.4. Площадь криволинейной трапеции 93

3.5. Площадь криволинейного сектора 94

3.6. Площадь плоской фигуры в случае параметрического задания
ее границ 96

3.7. Объем тел 99

3.8. Кубируемость тел вращения 100

3.9. Площадь поверхности вращения 102

Глава 4. Несобственные интегралы	107
4.1. Основные определения	107
4.2. Свойства несобственных интегралов	110
4.3. Основные методы интегрирования	112
4.4. Сходимость несобственных интегралов	119
4.4.1. Признаки сходимости для знакопостоянных функций	119
4.4.2. Общие признаки сходимости.	
Абсолютная и условная сходимость	123
4.4.3. * Главное значение несобственного интеграла	130
Библиографический список	133
Предметный указатель	134