

УДК 534.01: 534.14

## УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН С ПОСТОЯННЫМ ВРАЩАЮЩИМСЯ МАГНИТОМ В РОЛИ СТАТОРА И ИХ НЕЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Н. В. Кондратьева, Ф. Ф. Родюков, А. И. Шепелявый

Санкт-Петербургский государственный университет, 198504 Санкт-Петербург

Построена полная математическая модель движения рамки с током, питаемой от источника постоянного напряжения, которая помещена в поле постоянного магнита, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Из локального анализа этой модели следует ее неустойчивость при отсутствии внешней нагрузки, что противоречит практике эксплуатации двигателей. Поэтому рассмотренная модель ротора двигателей некорректна, хотя она часто используется. Для того чтобы устранить обнаруженное противоречие, вводится дополнительная рамка, ортогональная исходной, имеющая те же параметры, но короткозамкнутая. Полная математическая модель такой системы устойчива при отсутствии внешней нагрузки. Для случая асинхронного двигателя сформулированы условия дихотомичности, глобальной асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Рассмотрим схему электрической машины (ЭМ), в которой функцию статора выполняет вращающийся постоянный магнит, а функцию ротора — рамка с током. Представим магнитное поле статора ЭМ в виде постоянного по модулю вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , вращающегося в плоскости, перпендикулярной оси вращения ротора ЭМ, с постоянной угловой скоростью  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ , равной угловой частоте напряжения сети ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ ). Рассмотрим сначала схему ротора в виде одного электрического контура (рамки), к которому через коллектор подводится постоянное напряжение возбуждения  $u_f \geq 0$ .

Следует отметить, что условие  $u_f > 0$  соответствует случаю синхронного двигателя,  $u_f = 0$  — случаю асинхронного двигателя. Это согласуется с физическими представлениями, так как синхронный двигатель есть асинхронный двигатель, к которому добавлена обмотка возбуждения, дающая дополнительную обобщенную силу, сдвигающую положение равновесия асинхронного двигателя и позволяющую синхронному двигателю работать в синхронном режиме под нагрузкой.

Целью настоящей работы является вывод полной системы уравнений и анализ ее устойчивости.

При составлении уравнений движения указанной электромеханической системы (рис. 1) используем уравнения Лагранжа — Максвелла. Запишем выражения кинетической энергии  $T$  и диссипативной функции  $D$ :

$$T = T_m + T_e + T_{em}, \quad D = D_m + D_e,$$

где  $T_m$  — механокинетическая энергия;  $T_e$  — электрокинетическая энергия;  $T_{em}$  — электромеханокинетическая энергия;  $D_m$ ,  $D_e$  — механическая и электрическая составляющие диссипативной функции соответственно.

По-видимому, впервые представление кинетической энергии электромеханической системы в виде суммы трех слагаемых использовал Дж. К. Максвелл [1]. Третье слагаемое он назвал электропандерокинетической энергией. Для обнаружения этой составляющей,

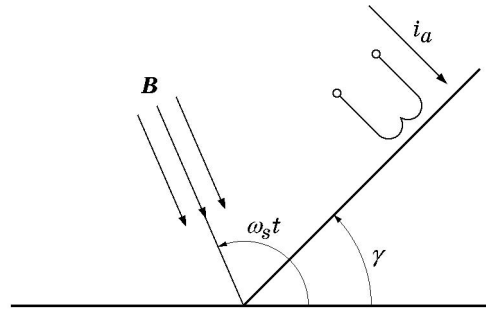


Рис. 1

содержащей произведения скоростей материальных точек и значений электрического тока, Дж. К. Максвелл провел эксперименты, результаты которых позволили сделать вывод, что вклад электропондерокинетической энергии в полную энергию системы столь незначителен, что не может быть обнаружен измерительными приборами. Этот вывод был подтвержден в начале XX в. с использованием более совершенной измерительной техники. В дальнейшем будем считать  $T_{em} = 0$ .

Известно, что суммарная мощность аэродинамических потерь и потерь на трение в подшипниках в ЭМ составляет доли процента номинальной мощности [2, с. 165]. Следовательно, величина  $D_m$  пренебрежимо мала и в дальнейшем можно считать  $D_m = 0$ . Следует отметить, что последнее предположение для дальнейших рассуждений непринципиально. Обычно считается, что момент трения в подшипниках есть величина постоянная, а момент, порождаемый силами аэродинамического сопротивления, пропорционален угловой скорости. Поэтому такие моменты можно рассматривать как составляющие внешнего момента нагрузки.

Запишем выражения для энергий  $T_m$ ,  $T_e$  и диссипативной функции  $D_e$ :

$$T_m = J\dot{\gamma}^2/2, \quad T_e = L_a i_a^2/2 + \Psi i_a \cos(\omega t - \gamma), \quad D_e = R_a i_a^2/2,$$

где  $J$  — момент инерции контура с током;  $\gamma$  — угол поворота магнитной оси рамки, проходящей через центр контура перпендикулярно его плоскости;  $L_a$  — индуктивность контура с током;  $i_a$  — ток в контуре;  $\Psi = BS w = \text{const}$  — амплитуда потокоцепления внешнего магнитного поля с электрическим контуром;  $B = \text{const}$  — модуль вектора магнитной индукции внешнего магнитного поля;  $S$  — площадь контура с током;  $w$  — число секций контура;  $R_a$  — сопротивление контура.

Уравнение Лагранжа — Максвелла для независимой электрической переменной  $i_a$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_e}{\partial i_a} + \frac{\partial D_e}{\partial i_a} = u_f$$

или

$$L_a \dot{i}_a - \Psi(\omega - \dot{\gamma}) \sin(\omega t - \gamma) + R_a i_a = u_f, \quad (1)$$

где  $u_f$  — обобщенная по координате  $i_a$  сила в виде постоянного напряжения возбуждения, подводимого к контуру с током.

Уравнение Лагранжа — Максвелла для независимой геометрической координаты  $\gamma$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_m}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial T_e}{\partial \gamma} + M_H = 0$$

( $M_H$  — момент внешней нагрузки, приложенный к рамке с током) или

$$J\ddot{\gamma} = \Psi i_a \sin(\omega t - \gamma) - M_H. \quad (2)$$

Система уравнений (1), (2) полностью описывает динамику исследуемой электромеханической системы.

Введем угол нагрузки

$$\theta = \omega t - \gamma \quad (3)$$

и скольжение  $s$  контура с током относительно внешнего магнитного поля

$$s = (\omega - \dot{\gamma})/\omega. \quad (4)$$

Из (3), (4) следует  $\dot{\theta} = \omega s$ .

Вместо текущего времени  $t$  введем безразмерное синхронное время  $\tau = \omega t$ , соответствующее углу поворота внешнего магнитного поля (вектора  $\mathbf{B}$ ). Тогда уравнения (1), (2) примут вид

$$\begin{aligned} L_a \omega \frac{di_a}{d\tau} - \omega \Psi \left(1 - \frac{d\gamma}{d\tau}\right) \sin \theta + R_a i_a &= u_f, \\ \frac{d\theta}{d\tau} = s = 1 - \frac{d\gamma}{d\tau}, \quad \frac{ds}{d\tau} &= -\frac{1}{\omega^2 J} (\Psi i_a \sin \theta - M_H). \end{aligned} \quad (5)$$

Для исследования системы (5) целесообразно записать ее в безразмерном виде, введя безразмерные ток  $\bar{i}_a$ , момент внешней нагрузки  $\bar{M}_H$ , напряжение  $\bar{u}_f$  и потокоцепление  $\bar{\Psi}$ :

$$i_a = \frac{u}{\omega L_a} \bar{i}_a, \quad M_H = \frac{u \Psi}{\omega L_a} \bar{M}_H, \quad u_f = \frac{u R_a}{\omega L_a} \bar{u}_f, \quad \Psi = \frac{u}{\omega} \bar{\Psi}.$$

Здесь  $u$  — базисное напряжение (например, амплитудное значение напряжения сети).

В безразмерных переменных система (5) примет следующий вид (черта над безразмерными величинами опущена, точка над переменной обозначает дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ ):

$$\dot{i}_a = -\alpha_r i_a + b s \sin \theta + \alpha_r u_f, \quad \dot{\theta} = s, \quad \dot{s} = -\delta (i_a \sin \theta - M_H). \quad (6)$$

Здесь  $\alpha_r = R_a/(\omega L_a)$ ;  $b = \bar{\Psi}$ ;  $\delta = u \Psi/(\omega^3 L_a J)$ .

В установившемся режиме из (6) получаем  $s = 0$ ,  $\theta = \theta_0$ ,  $i_a = u_f$ , из условия равновесия электромагнитного момента и момента нагрузки следует уравнение для  $\theta_0$

$$u_f \sin \theta_0 = M_H. \quad (7)$$

Отсюда вытекает существование двух положений равновесия при  $M_H < u_f$ .

Рассмотрим малые колебания системы (6) около положений равновесия. Соответствующая линейная система имеет вид

$$\dot{\tilde{i}}_a = -\alpha_r \tilde{i}_a + b \tilde{s} \sin \theta_0, \quad \dot{\tilde{\theta}} = \tilde{s}, \quad \dot{\tilde{s}} = -\delta (\tilde{i}_a \sin \theta_0 + u_f \tilde{\theta} \cos \theta_0), \quad (8)$$

где значения  $\theta_0$  определяются из уравнения (7).

Характеристическое уравнение системы (8) следующее:

$$\lambda^3 + \alpha_r \lambda^2 + \delta (b \sin^2 \theta_0 + u_f \cos \theta_0) \lambda + \delta u_f \alpha_r \cos \theta_0 = 0. \quad (9)$$

Миноры Гурвица для многочлена в (9) удовлетворяют условиям

$$\Delta_1 = \alpha_r > 0, \quad \Delta_2 = \delta \alpha_r b \sin^2 \theta_0 \geq 0, \quad \Delta_3 = \Delta_2 \delta u_f \alpha_r \cos \theta_0 \geq 0.$$

Равенство нулю второго и третьего миноров имеет место в режиме холостого хода, когда  $M_H = 0$ . Холостой ход — естественный режим работы практически всех ЭМ. Ни одна из них не может работать в неустойчивом режиме. Это несоответствие теории и практики обусловлено выбором модели ротора ЭМ в виде одной обмотки (рамки).