

## Устойчивость и колебания перевернутого маятника при полигармоническом возбуждении с некрatными частотами гармоник

© О.Н. Тушев, Е.К. Кондратьев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

*В решаемой задаче внешним воздействием на маятник является вертикальная высокочастотная полигармоническая вибрация точки подвеса. При этом частоты составляющих гармоник некрatны, что принципиально отличает задачу колебания маятника от классической постановки задачи в форме уравнения Хилла. В общем случае такое воздействие является нестационарным и аперидическим. Решение задачи вертикального полигармонического воздействия на устойчивость перевернутого маятника осуществляется с помощью известного метода Н.Н. Боголюбова в два приближения с небольшим изменением. Движения маятника раскладываются на две составляющие — «медленную», с частотой порядка собственной, и «быструю», с частотами внешнего воздействия. Аперидичность процесса исключает возможность применения эффективного приема осреднения решения на периоде быстрых колебаний, поэтому вместо него используется повторная операция сегрегации движения. В результате решения получено уравнение для такого же медленного движения маятника, как и в случае периодического внешнего воздействия. Определены области устойчивости маятника при быстрых вибрациях. Показано, что при этом одновременно может произойти потеря устойчивости в окрестности устойчивого вертикального положения маятника вследствие параметрического резонанса или даже нескольких резонансов (по крайней мере теоретически) на комбинационных частотах внешнего воздействия. Полученные результаты проиллюстрированы примером, содержащим их оценку с помощью численного моделирования.*

**Ключевые слова:** маятник, полигармоника, медленное и быстрое движения, устойчивость, параметрический резонанс

**Введение.** Динамические эффекты, свойственные механическим системам под действием аддитивных и мультипликативных возмущений, известны давно. Первые результаты получены на основании исследования динамики физического маятника с изменяемыми параметрами, или для такого случая, когда точка его закрепления совершает вертикальные колебания. Маятник представляет собой простую систему с одной степенью свободы, что, как правило, дает возможность получать аналитическое решение. Динамическое поведение параметрически возбужденного маятника во многом аналогично поведению и других более сложных систем, например многостепенного маятника. При этом динамику системы описывают уравнениями Е. Матье или Д. Хилла. В зависимости от свойств внешнего возбуждения сложились два варианта рассмотрения данной задачи [1].

1. Потеря устойчивости и динамическое поведение системы при воздействии в области низких частот. При этом возникают параметрические и аддитивные резонансы. Известным результатом является, например, диаграмма Айнса — Стретта, где обозначены границы областей неустойчивости для маятника при вертикальном воздействии, имеющем форму синуса [2]. Такая задача в несколько иных, более общих постановках приведена в [3–6]. В работах [7, 8] изложена динамика линейной системы при двух периодических воздействиях, при которых возникают параметрические резонансы на частоте, равной разнице частот внешних воздействий.

2. Принципиально другой результат проявляется тогда, когда частоты внешних воздействий существенно превышают собственную частоту системы. При этом положение маятника, расположенного вертикально (в перевернутом положении, что соответствует максимальной потенциальной энергии), становится устойчивым. Первые результаты решения данной задачи были получены академиком П.Л. Капицей [9]. Основополагающие результаты, касающиеся проблемы повышения устойчивости механических систем посредством вибраций, были опубликованы В.Н. Челомеем [10, 11]. Для их получения был использован метод, разработанный Н.Н. Боголюбовым и развитый Ю.Л. Митропольским [12, 13]. Эти результаты были обобщены и применены для маятника со многими степенями свободы [14, 15]; эксперимент с маятником с тремя степенями свободы и теория его движения рассмотрены в [16].

Значительный интерес представляет задача, ставшая по сути обобщением задачи о вертикальной вибрации маятника, а именно о «косой» вибрации, при которой угол направления вибрации отличен от 0 и  $\pi/2$ . При этом возникает стационарное перемещение («уход») маятника, что обнаруживается в появлении паразитных перемещений стрелок приборов и вращении гаек в незатянутых резьбовых соединениях [12, 17].

Очень важной особенностью результатов, полученных практически во всех опубликованных работах, например в [18–20], было то, что они справедливы при условии периодичности внешних воздействий и в частности, синусоидальных. Если снять это ограничение, то количество вариантов динамического поведения параметрически возбуждаемых систем существенно возрастает и границы между двумя подходами стираются [21].

Цель настоящей работы — анализ влияния высокочастотных воздействий с некратными частотами на линейную механическую систему, а также определение возникающих в результате этого эффектов.

**Решение задачи.** Рассмотрим физический маятник (рис. 1), точка подвеса которого совершает вертикальные полигармонические колебания:

$$z(t) = \sum_{i=1}^m \delta_i \cos p_i t, \quad (1)$$

где  $\delta_i$  — амплитуды;  $p_i$  — некрatные частоты;  $i$  — номер воздействия;  $m$  — количество воздействий;  $t$  — время.

Следует заметить, что в принятой постановке фазовые сдвиги, которые формально можно ввести в соотношение (1), фактически какой-либо роли не играют.

Уравнение движения одностепенного маятника в относительной системе координат имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega^2 \left( -1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cos p_i t \right) \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

где  $n$  — декремент затухания;  $\omega$  — собственная частота,  $\omega^2 = \frac{Mgl}{J}$

( $J$  — момент инерции);  $\alpha_i = \delta_i p_i^2 / g$ .

Уравнение (2) отличается от классического уравнения Хилла только некрatностью частот, наличием диссипативного члена и нулевой точкой. Используем допущения и схему решения рассматриваемой задачи, предложенные в ранее указанных работах, но с некоторым отличием, связанным со спецификой ее постановки. Считаем, что  $\delta_i \ll l$ ,  $p_i \gg \omega \forall i$ . Допустим, что движение маятника складывается из медленного  $\varphi_0$  с частотами порядка  $\omega$  и быстрого  $\Delta\varphi_i$  с частотами  $p_i$ :

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i. \quad (3)$$

Подставим решение (3) в уравнение (2):

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi}_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\ddot{\varphi}_i + 2n\dot{\varphi}_0 + 2n\sum_{i=1}^m \Delta\dot{\varphi}_i + \\ & + \omega^2 \left( -1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cos p_i t \right) \sin \left( \varphi_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В первом приближении считаем, что

$$\sin \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i = 0,$$

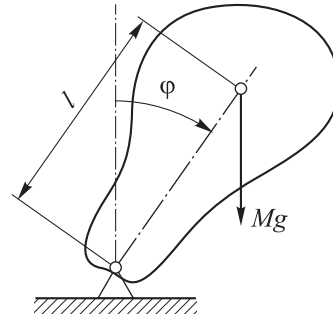


Рис. 1. Физический маятник:

$M$  — масса;  $g$  — ускорение свободного падения;  $l$  — расстояние от точки подвеса до центра тяжести;  $\varphi$  — угол отклонения от вертикали