

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Международная научно-исследовательская лаборатория
«Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б. Н. Делоне

Д. П. Ильютко, В. О. Мантуров, И. М. Никонов

Комбинаторная топология и теория графов в задачах и упражнениях

Допущено УМО по классическому университетскому
образованию в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по направлению
010100 Математика

Ярославль
ЯрГУ
2013

УДК 519.1(075)
ББК В152.5_я73-4+В174.2_я73-4
И 48

Серия «Библиотека Делоне»

Главные редакторы: Н. П. Долбилин, Х. Эдельсбруннер,
А. О. Иванов

Редакторы: В. М. Бухштабер, В. Л. Дольников,
Р. Н. Карасёв, В. О. Мантуров, Н. Г. Мощевитин,
О. Р. Мусин, М. В. Невский, И. Х. Сабитов, М. И. Штогрин

Рецензенты:

А. В. Чернавский, д-р физ.-мат. наук, проф.;
кафедра дифференциальных уравнений и приложений
механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова

Ильютко, Денис Петрович.

И 48 Комбинаторная топология и теория графов в задачах
и упражнениях : учебное пособие / Д. П. Ильютко,
В. О. Мантуров, И. М. Никонов; Яросл. гос. ун-т
им. П. Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2013. — 150 с.
ISBN 978-5-8397-0980-5

В учебном пособии представлены оригинальные задачи по комбинаторной топологии и теории графов. Часть задач была решена авторами и открывает новые направления исследований. Приведены также некоторые нерешенные задачи.

Учебное пособие рассчитано на студентов-математиков, аспирантов-математиков и всех, кто интересуется комбинаторикой и маломерной топологией.

УДК 519.1(075)

ББК В152.5_я73-4+В174.2_я73-4

Опубликовано за счет средств гранта Правительства РФ
по постановлению № 220, договор 11.G34.31.0053

Иллюстрации А. Т. Фоменко

Дизайн обложки выполнен К. Эдельсбруннер

ISBN 978-5-8397-0980-5

© ЯрГУ, 2013

Оглавление

Предисловие	3
1. ВВЕДЕНИЕ	7
1.1. Двумерные многообразия	7
1.2. Эйлерова характеристика многообразия	19
1.3. Фундаментальная группа и накрытия	20
1.4. Графы и эйлеровы циклы	24
1.5. Планные графы: формула Эйлера и теорема Понтрягина–Куратовского	28
1.6. Раскраски графов	30
2. КРЕСТОВЫЕ ГРАФЫ	32
2.1. Введение	32
2.2. Планные крестовые графы	35
2.3. Эквивалентность критериев планарности Васильева и Понтрягина–Куратовского	41
2.4. Гауссовы циклы и поворачивающие обходы	61
2.5. Вложение крестовых графов в двумерные поверхности	81
3. МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ АТОМЫ	88
3.1. Введение	88
3.2. Максимально симметричные атомы	90
3.3. Прimitивные максимально симметричные атомы	98
3.4. Классификация максимально симметричных атомов	109
4. ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕТОК	114
4.1. Введение	114
4.2. Маломерные целочисленные решетки	118
4.3. Для каждого m рост числа $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2m})$ полиномиален по n и имеет степень не больше m	124
4.4. Нижние оценки для хроматических чисел целочисленных решеток	130
4.5. Оценки для рациональных решеток \mathbb{Q}^n	132
4.6. Раскраски некоторых конечных графов	135
4.7. Оценки для решеток над алгебраическими расширениями кольца \mathbb{Z}	136
4.8. Некоторые открытые проблемы	137