

Ю.Н. Смолин

# АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**Учебное пособие**

5-е издание, стереотипное

*Допущено Министерством образования Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов  
физико-математических факультетов  
высших педагогических учебных заведений*

Москва  
Издательство «ФЛИНТА»  
2017

УДК 511(075.8)  
ББК 22.13я73  
С51

**Смолин Ю.Н.**

С51 Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Ю.Н. Смолин. — 5-е изд., стер. — М. : ФЛИНТА, 2017. — 464 с.

ISBN 978-5-9765-0050-1

В учебном пособии рассматриваются системы линейных алгебраических уравнений, матрицы и их определители, конечномерные векторные пространства и действующие в них линейные операторы, основные алгебраические системы, теория чисел, многочлены и расширения полей. Заканчивается пособие разделом о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах и связанным с ним вопросом о построениях циркулем и линейкой.

Для студентов математических специальностей высших учебных заведений.

УДК 511(075.8)  
ББК 22.13я73

ISBN 978-5-9765-0050-1

© Издательство «ФЛИНТА», 2017

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b>	3
<b>Глава 1. Системы алгебраических уравнений</b>	5
§ 1. Метод Гаусса	5
п.1. Основные понятия (5). п.2. Метод Гаусса (8).	
§ 2. Определители матриц	14
п.1. Подстановки (14). п.2. Определители квадратных матриц (21). п.3. Миноры и алгебраические дополнения (32). п.4. Формула Крамера (39).	
§ 3. Общая теория систем линейных алгебраических уравнений	42
п.1. Векторы (42). п.2. Линейная зависимость векторов (44). п.3. Базис и ранг системы векторов (47). п.4. Ранг матрицы (54). п.5. Однородные системы линейных алгебраических уравнений (67). п.6. Связь между решениями неоднородной и ассоциированной с ней однородной систем линейных алгебраических уравнений (71).	
§ 4. Алгебра матриц	73
п.1. Операции над матрицами (73). п.2. Достаточный признак обратимости матриц (78). п.3. Элементарные матрицы (83). п.4. Определитель произведения матриц (89). п.5. Критерий обратимости матриц (92). п.6. Второй способ нахождения матрицы, обратной к данной (94). п.7. Матричный способ решения системы $n$ линейных алгебраических уравнений с $n$ переменными (96).	
<b>Глава 2. Основные алгебраические системы</b>	100
§ 1. Группы	100
п.1. Основные понятия (100). п.2. Свойства групп (103). п.3. Подгруппы (107). п.4. Сравнения по подгруппе (110). п.5. Правые смежные классы (112). п.6. Конечные группы (114). п.7. Нормальные подгруппы (116). п.8. Фактор — группы (120). п.9. Гомоморфизм групп (122). п.10. Циклические группы (131).	

§ 2. Кольца	136
<p>п.1. Основные понятия (136). п.2. Сравнения по идеалу (141). п.3. Фактор — кольца (143). п.4. Гомоморфизм колец (144). п.5. Характеристика кольца (147).</p>	
§ 3. Поля. Поле комплексных чисел	150
<p>п.1. Основные понятия (150). п.2. Поле комплексных чисел (155). п.3. Алгебраическая форма комплексных чисел (161). п.4. Геометрическая интерпретация комплексных чисел (162). п.5. Тригонометрическая форма комплексных чисел (163). п.6. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме (167). п.7. Геометрическая интерпретация операций над комплексными числами (168). п.8. Корни <math>n</math> — й степени из комплексных чисел (171). п.9. Квадратные уравнения над полем комплексных чисел (175).</p>	
§ 4. Векторные пространства	179
<p>п.1. Основные понятия (179). п.2. Свойства векторных пространств (181). п.3. Подпространства (182). п.4. Размерность векторного пространства (185). п.5. Базис векторного пространства (187). п.6. Переход от одного базиса к другому (192). п.7. Гомоморфизм векторных пространств (196). п.8. Векторные пространства со скалярным умножением (204). п.9. Процесс ортогонализации (207). п.10. Евклидовы пространства (209). п.11. Ортонормированный базис (211). п.12. Гомоморфизм евклидовых пространств (213).</p>	
§ 5. Линейные операторы	216
<p>п.1. Основные понятия (216). п.2. Дефект и ранг линейного оператора (218). п.3. Матрица линейного оператора (222). п.4. Связь между матрицами оператора в различных базисах (230). п.5. Спектр оператора (233). п.6. Собственные векторы линейного оператора (237). п.7. Линейные операторы с простым спектром (238).</p>	

<b>Глава 3. Теория чисел</b>	241
§ 1 Делимость в кольце целых чисел	241
п.1. Делимость чисел (241). п.2. Наибольший общий делитель нескольких чисел (244). п.3. Наименьшее общее кратное нескольких чисел (250). п.4. Разложение чисел на простые множители (253).	
§ 2 Простые числа	260
п.1. Теорема Евклида (260). п.2. Решето Эратосфена (260). п.3. Распределение простых чисел (262).	
§ 3. Систематические числа	265
п.1. Позиционные системы счисления (265). п.2. Арифметические операции над систематическими числами (268). п.3. Перевод чисел из одной системы счисления в другую (269).	
§ 4. Цепные дроби	271
п.1. Конечные цепные дроби (271). п.2. Подходящие дроби (274). п.3. Диофантовы уравнения (281).	
§ 5. Сравнения в кольце целых чисел	285
п.1. Основные понятия (285). п.2. Свойства сравнений (287). п.3. Полная система вычетов (289). п.4. Приведенная система вычетов (292). п.5. Теоремы Эйлера и Ферма (294). п.6. Линейные сравнения (299). п.7. Способ подбора (300). п.8. Способ преобразования коэффициентов (300). п.9. Способ Эйлера (301). п.10. Способ, основанный на применении цепных дробей (302). п.11. Индексы (305). п.12. Решение линейных сравнений (316). п.13. Решение двучленных сравнений $n$ -й степени (318). п.14. Решение двучленных показательных сравнений (319). п.15. Нахождение остатка от деления (320). п.16. Признаки делимости/ (322). п.17. Проверка арифметических действий (325). п.18. Определение длин периода и предпериода бесконечной периодической десятичной дроби (327).	

<b>Глава 4. Многочлены</b>	<b>334</b>
§ 1. Многочлены от одной переменной	334
п.1. Кольцо многочленов над коммутативным кольцом с единицей (334). п.2. Кольцо многочленов над областью целостности (342). п.3. Кольцо многочленов над полем (351). п.4. Выделение кратных делителей (362). п.5. Выделение кратных корней (364). п.6. Разложение многочлена по степеням $x - x_0$ (567). п.7. Поле разложения (368).	
§ 2. Многочлены от нескольких переменных	373
п.1. Кольцо многочленов от нескольких переменных (373). п.2. Симметрические многочлены (378). п.3. Результant многочленов (388).	
§ 3. Многочлены от одной переменной над числовыми полями	395
п.1. Многочлены над полем комплексных чисел (395). п.2. Уравнения 3 – й степени (404). п.3. Уравнения 4 – й степени (410). п.4. Многочлены над полем действительных чисел (412). п.5. Отделение действительных корней (415). п.6. Многочлены над полем рациональных чисел (423).	
<b>Глава 5. Расширения числовых полей</b>	<b>432</b>
§ 1. Алгебраические и трансцендентные элементы	432
п.1. Поле алгебраических элементов (432). п.2. Простые расширения поля (437). п.3. Алгебраические и трансцендентные числа (447).	
§ 2. Разрешимость алгебраических уравнений в радикалах	448
п.1. Разрешимость алгебраических уравнений в квадратных радикалах (448). п.2. Геометрические построения циркулем и линейкой (454).	
<b>Список литературы</b>	<b>459</b>
	463