МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Т.А. Крыловецкая, В.Д. Овсянников

Задачи по электродинамике

Часть 1.

Стационарные электромагнитные поля

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

Предисловие

Настоящее пособие предназначается для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы по курсу «Электродинамика» для студентов 3-го курса физического факультета. Данное издание ориентировано главным образом на студентов направлений 03.03.03 — «Радиофизика» и 11.03.04 — «Электроника и наноэлектроника».

В учебном плане курсу «Электродинамика» отводится 120 часов аудиторных занятий, из них 50 часов – практических, на которых изучение материала основывается на решении задач. Настоящее пособие представляет собой руководство к таким занятиям и содержит минимальный набор задач, умение решать которые необходимо для успешного овладения материалом первой части курса – теорией стационарных электромагнитных полей.

В главе «Векторный анализ» рассматриваются задачи, способствующие овладению основными приемами преобразования векторных дифференциальных выражений и использования в расчетах интегральных аналитических соотношений – теоремы Гаусса - Остроградского и теоремы Стокса.

В разделе «Электростатика» изучаются основные методы расчета полей стационарных систем зарядов. Наряду с интегральными методами расчета – теоремой Гаусса и принципом суперпозиции полей – предлагается набор задач на использование общих решений уравнений Лапласа и Пуассона, а также специального метода расчета электрических полей неподвижных зарядов и проводников – метода изображений.

В разделе «Постоянное магнитное поле» также представлены задачи на использование как интегральных формул Био – Савара и закона Ампера, так и дифференциальных уравнений магнитного поля.

Дополнительный набор задач можно найти в книжных изданиях, в частности, в сборниках задач [1–3], приведенных ниже в списке рекомендуемой литературы. Обращение к книжным изданиям является необходимой частью самостоятельной работы наряду с активным освоением курса лекций и решением задач, предлагаемых на практике и в качестве домашних заданий.

ŋddqayэʏ bƎ dəbƎbɣзə d эɔаqɔʎ Ɉqdqɣqʎè

Явные выражения для этого вектора в декартовых, цилиндрических и сферических координатах имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)= \\
&= \mathbf{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \phi}-\frac{\partial a_\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{e}_\phi\left(\frac{\partial a_z}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial z}\right)+\mathbf{e}_z\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ra_\phi)-\frac{\partial a_r}{\partial \phi}\right)= \\
&= \mathbf{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta a_\phi)-\frac{\partial a_\theta}{\partial\phi}\right)+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_\phi)\right)+ \\
&\quad +\mathbf{e}_\phi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_r}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)\right). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Операции $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ можно записать с помощью оператора ∇: $\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a}=(\nabla\cdot\mathbf{a})$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}=[\nabla\times\mathbf{a}]$.

Важнейшим уравнением электродинамики постоянных полей является уравнение Лапласа, которому удовлетворяет электростатический потенциал в точках пространства, где свободных электрических зарядов нет,

$$\Delta\varphi=0, \qquad (5)$$

где Δ – линейный дифференциальный оператор второго порядка (квадрат оператора ∇). Явное выражение этого оператора в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\Delta=\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}= \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}= \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Уравнение Лапласа (5) в точках, где есть пространственный заряд, превращается в уравнение с неоднородной правой частью, называемое уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi(\mathbf{r})=f(\mathbf{r}). \qquad (7)$$

Частное решение этого уравнения можно найти с помощью функции Грина уравнения Лапласа $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, удовлетворяющей уравнению (7) с δ-образной неоднородностью

$$\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (8)$$

Решение уравнения (8) (которое можно получить в аналитическом виде методом Фурье-преобразования) имеет вид:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{9}$$

С его помощью решение уравнения (7) можно записать в виде:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{10}$$

где интегрирование проводится по всему пространству. Вообще говоря, к этому выражению можно добавить любую функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа (5) (например, линейную функцию декартовых координат). Однако для электродинамики интерес представляют только поля, создаваемые конкретными материальными источниками, плотность которых и описывает функция $f(\mathbf{r}')$ в подынтегральном выражении в (7), и в отсутствие которых (т. е. при $f(\mathbf{r}') \equiv 0$) поле $\varphi(\mathbf{r})$ обращается в нуль.

Основными интегральными теоремами электродинамики являются теорема Остроградского – Гаусса и теорема Стокса. Эти теоремы лежат в основе инвариантного определения дивергенции и ротора векторного поля. Теорема Гаусса – Остроградского гласит:

$$\oint\limits_S (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}) = \int\limits_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dV. \tag{11}$$

Интеграл от дивергенции векторного поля $\mathbf{a}$ в правой части этого равенства вычисляется по объему, ограниченному замкнутой поверхностью, поток вектора через которую вычисляется в левой части.

Теорема Стокса гласит:

$$\oint\limits_L (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}) = \int\limits_S (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}). \tag{12}$$

Поверхность S, через которую вычисляется поток ротора векторного поля в правой части этого соотношения, опирается на контур, циркуляция по которому вычисляется для этого же векторного поля в левой части. Направление нормали к поверхности образует с направлением обхода контура правовинтовую систему.

Задачи к главе 1

Задача 1.1. Показать, что

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0; \qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = 0.$$

Решение. Используя возможность циклической перестановки векторов в смешанном произведении, получим:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\nabla\cdot[\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})]) = ([\nabla\times\nabla]\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0,$$

поскольку оператор $[\nabla\times\nabla]$ является дифференциальным векторным оператором, компоненты которого представляют собой разность вторых частных смешанных производных, отличающихся лишь порядком дифференцирования по координатам трехмерного пространства.

Задача 1.2. Доказать дифференциальные тождества:

а) $\operatorname{grad}(f\varphi) = \varphi\ \operatorname{grad}\ f + f\ \operatorname{grad}\ \varphi$;

б) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi)$;

в) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A} + [\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{A}]$;

г) $\operatorname{div}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = (\mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B})$;

д) $\operatorname{rot}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$;

е) $\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = [\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}] + [\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}] + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$;

ж) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$.

Решение. Используя оператор ∇ и принимая во внимание, что он и вектор, и дифференциальный оператор, вычисления проводим с учетом правил дифференцирования произведения (стрелкой можно указывать, на какой из сомножителей действует дифференциальная операция):

а) $\operatorname{grad}(f\varphi) = \nabla(f\varphi) = \nabla(\overset{\downarrow}{f}\ \varphi) + \nabla(f\ \overset{\downarrow}{\varphi}) = \varphi\ \operatorname{grad}\ f + f\ \operatorname{grad}\ \varphi$;

б) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\cdot(\varphi\mathbf{A})) = (\nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\varphi}\ \mathbf{A})) + (\nabla\cdot(\varphi\ \overset{\downarrow}{\mathbf{A}})) = (\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi) + {}$
$+\varphi\operatorname{div}\mathbf{A}$;

в) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = [\nabla\times\varphi\mathbf{A}] = [\nabla\times\overset{\downarrow}{\varphi}\ \mathbf{A}] + [\nabla\times\varphi\ \overset{\downarrow}{\mathbf{A}}] = [\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{A}] + \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A}$;