Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Центр довузовского и дополнительного образования

Математика

Методические указания и контрольные работы для слушателей подготовительных курсов

Ярославль 2005

УДК 51(075)
ББК В1я729
М 34

Составитель И.Н. Рябикова

М 34 **Математика**: Методические указания и контрольные работы для слушателей подготовительных курсов / Сост. И.Н. Рябикова ; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2005. – 24 с.

Предлагаемые обучающимся на заочных подготовительных курсах ЯрГУ контрольные работы по математике содержат в основном задачи вступительных экзаменов в Ярославском университете. По возможности задачи следуют друг за другом в порядке возрастания их трудности, но в первую очередь выдерживается общепринятая в школьной справочной литературе последовательность рассмотрения материала.

УДК 51(075)
ББК В1я729

Учебное издание

Математика

Методические указания и контрольные работы для слушателей подготовительных курсов

Составитель **Рябикова** Ирина Николаевна

Редактор, корректор А.А. Аладьева
Компьютерная верстка И.Н. Ивановой

Подписано в печать 10.11.2005. Формат 60x84/16. Бумага тип.
Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,1. Тираж 500 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Ярославский государственный университет
150000 Ярославль, ул. Советская, 14
Отпечатано ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.
г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37 тел. (0852) 73-35-03.

ŋdqþayeY bȄ debȄbҮ3e d ɛɑɑbɔʎ ɹdqþʎqʎè

Предисловие

Предлагаемые обучающимся на заочных подготовительных курсах ЯрГУ контрольные работы по математике содержат в основном задачи вступительных экзаменов в Ярославском университете. По возможности задачи следуют друг за другом в порядке возрастания их трудности, но в первую очередь выдерживается общепринятая в школьной справочной литературе последовательность рассмотрения материала. Поэтому, кроме своего обычного учебника, рекомендуется использовать любой справочник по математике для школьников, чтобы повторить известный материал в форме компактно сформулированных сведений.

Часть задач (например, № 10 и № 13 в Контрольной работе № 1) носит вспомогательный, направляющий характер. Не откладывайте выполнение заданий. Даже если задача “не получается”, лучше изложить свои соображения и сомнения по ее поводу, чтобы проверяющий мог точнее корректировать ваши действия. Не нужно бояться ошибиться на этапе подготовки, - меньше ошибок будет на экзамене.

Письменный экзамен по математике обычно содержит 5 – 7 заданий различной сложности, большая часть которых требует привлечения знаний сразу нескольких разделов программы. Поэтому сдающим письменный экзамен следует решать как можно больше самых разнообразных задач. В качестве Контрольных работ № 9 и № 10 приведены примеры вариантов письменного экзамена на различных факультетах ЯрГУ.

Контрольная работа № 1

Начните с повторения тождеств сокращенного умножения, так как без их применения не обходится решение почти ни одной алгебраической задачи.

Наиболее рациональный подход к решению первых двух задач состоит, кроме того, не только в использовании теорем о делимости суммы и произведения натуральных чисел, но и в применении очевидного свойства последовательности натуральных чисел:

$$1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;\ \dots\ n;\ \dots\ ,$$

в которой каждое второе число делится на 2, каждое третье – на 3, каждое четвертое – на 4 и т.д. Применяйте знак делимости без остатка “ ⋮ “.

1. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9 без остатка.

2. Доказать, что если сумма четырех идущих подряд натуральных чисел делится на 5, то ни одно из них на 5 не делится.

3. Упростите выражение, грамотно применяя определение и свойства корня четной степени:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right):\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right).$$

4. При каком значении параметра (т.е.буквенного коэффициента) k многочлен $x^2+2(k-9)x+k^2+3k+4$ является полным квадратом?

5. Доказать справедливость равенства $а^3+в^3+с^3=3авс$ для случая $а+в+с=0$.

6. Выразите значение величины $x^4+y^4+z^4$, если $x+y+z=0$ и $x^2+y^2+z^2=A$.

Повторите свойства многочленов с одной переменной и целыми коэффициентами:

а) Два таких многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной.

б) Число a является корнем многочлена тогда и только тогда, когда многочлен делится без остатка на $(x-a)$.

в) Количество возможных корней многочлена не превышает его степени.

г) Любой многочлен 3-й и выше степени (с целыми коэффициентами) разложим на множители не выше 2-й степени (с действительными коэффициентами).

д) Если приведенный многочлен имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена. Если неприведенный многочлен имеет рациональные корни m/n, то m - это делитель свободного члена, n - делитель старшего коэффициента.

7. Найдите такие действительные числа a и b, чтобы равенство

$$\frac{3x}{x^2+x-2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$$

выполнялось тождественно (т. е. при всех допустимых значениях x).

8. При каком значении p многочлен $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + px + 11$ без остатка делится на двучлен $x+1$?

9. Найти значения параметров a и b, если известно, что $x_1=-1$ и $x_2=2$ являются корнями уравнения $x^4-2x^3+ax^2+14x+b = 0$. При найденных значениях a и b определить остальные корни этого уравнения.

10. Разложить на множители:

а) $y^5+y^4+y^3+y^2+y+1$;

б) $x^4+x^3-7x^2-x+6$.

11. Три различных числа a, $в$, c удовлетворяют соотношениям $a^3+ma+n=0$; $в^3+mв+n=0$; $c^3+mc+n=0$. Найти $a+в+c$.

12. Решите уравнения с целыми коэффициентами:

а) $x^4+4x^3+7x^2+6x+2=0$; б) $x^3-5x^2+8x-4=0$;

в) $2x^3+7x^2-28x+12=0$; г) $2x^4+7x^3+6x^2+7x-6=0$.

13. Докажите и запомните:

а) В треугольнике медиана равна половине той стороны, которую она делит пополам, тогда и только тогда, когда треугольник - прямоугольный.

б) Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную его сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

14. На стороне BC параллелограмма ABCD выбрана такая точка E, что BE/EC = 2. Известно, что четырехугольник AECD таков, что в него можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Найти угол BAD.

15. На продолжениях сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника ABCD построены точки: M, N, P, R - такие, что AB=BM, BC=CN, CD=DP, DA=AR. Найти отношение площадей четырехугольников ABCD и MNPR.