МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Л.Н. Ляхов,
Э.Л. Шишкина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

Содержание

Краткая история производных произвольного порядка **5**

1 Необходимые сведения из функционального анализа **10**

1.1 Некоторые классы функций 10

1.1.1 Метрическое пространство. Теорема Банаха 11

1.1.2 Гёльдеровы функции, абсолютно непрерывные функции, класс AC^n 13

1.1.3 Класс L_p и его свойства 16

1.2 Специальные функции и символы 18

1.2.1 Гамма-функция, бета-функция, пси-функция, символ Похгаммера и биномиальные коэффициенты 19

1.2.2 Функция Бесселя первого рода, функция Миттаг-Леффлера и гипергеометрическая функция Гаусса . . 23

2 Определения и свойства дробных производных и интегралов **26**

2.1 Дробные интегралы и производные на отрезке вещественной оси 26

2.1.1 Интегральное уравнение Абеля 27

2.1.2 Обоснование решения уравнение Абеля 29

2.1.3 Определение дробных интегралов Римана-Лиувилля . 35

2.1.4 Определение дробных производных Римана-Лиувилля 38

2.1.5 Дробное интегрирование и дифференцирование как взаимно обратные операции 45

2.1.6 Формулы композиции 50

2.2 Дробная производная Грюнвальда-Летникова 52

приписывается почти совершенно ясный и не "фантазийный" результат

$$\frac{d^{-n}}{dx^{-n}}e^{kx} =' k^{-n}e^{kx}.$$

Слово "почти" здесь означает, что это выражение справедливо с точностью до многочлена порядка $n-1$ с неопределенными коэффициентами интегрирования; по этой причине мы поставили штрих над знаком последнего равенства.

Теперь, дав опять же волю воображению, можно ввести и интегралы отрицательного порядка, считая их соответствующими производными.

Операторы дробного интегродифференцирования имеют довольно громоздкую конструкцию, и могут принимать различные формы[2], действия которых не всегда совпадают. Но, несмотря на это, дробное интегродифференцирование используется при решении многих сложных прикладных задач физики, биологии, теории управления и др., которые нельзя решить обычными средствами и чему в настоящее время посвящено большое количество исследований (см. книги [8], [9], [12], [21] и имеющиеся там ссылки на научные источники).

Как уже было отмечено, идея обобщения понятия дифференцирования $\frac{d^p}{dx^p}$ на нецелые значения p не является новой и возникла одновременно с возникновением интегрального и дифференциального исчисления[3]. Еще в 1695 г. Готфрид Вильгельм Лейбниц в свойм письме Гийому Франсуа Лопиталю [22] упоминает о возможности рассматиривать дифференциалы и производные порядка $1/2$, а в письме Джону Валлису и Якобу Бернулли

[2] Известны дробные производные Лиувилля, Римана-Лиувилля, Маршо, Вейля и другие.

[3] Отметим, что по настоящему строгая теория дробного интегродифференцирования появится значительно позже (30-е годы 19 века), но в процессе становления математического анализа некоторые обобщения все же были сделаны.

ŋqdqɐeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɐ Ɉqddɏqɐè

в 1697 г. [23] Лейбниц приводит формулу (выше уже нами упомянутую)

$$\frac{d^n e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx}, \tag{1}$$

и отмечает, что ей можно придать смысл и при нецелых значениях n.

Леонард Эйлер ввел в обиход научных исследований понятие "гамма-функция" $\Gamma(x)$, которая призвана играть роль "факториала" для нецелых чисел[4]. В 1730 г. в [16] он заметил, что результату вычисления производной от степенной функции

$$\frac{d^n}{dx^n}\,x^m = m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n},$$

можно придать смысл и при нецелом p. Именно, для целого n в силу известного равенства для гамма-функции

$$\Gamma(m+1) = m(m-1)...(m-n+1)\Gamma(m-n+1)$$

предыдущую формулу можно записать в виде

$$\frac{d^p}{dx^p}\,x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}\,x^{m-n},$$

а это выражение вполне осмысленно для произвольных значений n.

И, пожалуй, самое существенное влияние на создание дробного интегродифференциального исчисления оказал Нильс Хенрик Абель. Причем он даже не сознавал, что по исследуемой им задаче, которая казалась занимательной и скорее физической, чем математической, будут введены новые формы интегродифференцирования. Абель в работе [14] рассматривал задачу о нахождении кривой, при скольжении по которой под действием сил гравитации время достижения нижней точки не зависит от положения начальной точки (эта задача и ее решение приведены в

[4]Их обычно называют „гамма функция Эйлера“

ђqdqyeҮ bẾ dәqẾbҮзә d ɐɔɑɓɔʎ ɈqdqҮqʎә

конце пособия, стр. 79). Эта кривая носит название *таутохрона* и, как мы увидим в конце пункта 3.3.1, представляет собой часть *циклоиды*. В связи с этой задачей[5] Абелем было получено решение интегрального уравнения

$$\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^\alpha} = f(x), \qquad x > a, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{2}$$

Как оказалось в последствии, левая часть этого уравнения представляет собой интеграл[6] дробного порядка $1-\alpha$, а его решение — соответствующая дробная производная от правой части этого уравнения. Отметим, что хотя задача о таутохроне проводит к случаю $\alpha=1/2$, Абель решил уравнение (2) именно для произвольного $\alpha\in(0,1)$. Он выразил это решение с помощью интеграла порядка α (т.е. с помощью производной отрицательного порядка):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}}.$$

По сути, создателем теории дробного интегро-дифференцирования является Жозеф Лиувилль. В 1832 г. в работе [24], следуя Лейбницу (см. (1)), он предложил дифференцировать функции, представимые в виде ряда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$ по формуле

$$\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\nu e^{a_k x}.$$

В этой же работе Лиувиллем получена формула

$$D^{-p} f(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int\limits_0^\infty \varphi(x+t) t^{p-1} dt, \quad -\infty < x < \infty, \quad Re\, p > 0,$$

[5] Сейчас в учебниках эта задача называется „задачей о таутохроне“

[6] При $\alpha = 0$ это интеграл первого порядка, что очевидно; при $\alpha = -1$ это интеграл второго порядка (т.е. неопределенный интеграл от неопределенного интеграла), что не так очевидно и обсуждается далее, см. фомулу (41) при $n = 2$.