

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по программе бакалавриата по направлениям подготовки
43.03.04 «Политология», 39.03.01 «Социология»,
39.03.02 «Социальная работа», 37.03.01 «Психология»,
по направлению подготовки специалитета
37.05.01 «Клиническая психология»

2-е издание, стереотипное

Москва
Издательство «ФЛИНТА»
Издательство Уральского университета
2017

УДК 517(075.8)
Н723

Рецензенты:
лаборатория прикладной механики
Института машиноведения УрО РАН
(заведующий лабораторией
кандидат технических наук, доцент Л. Ф. Спесак);
С. И. Канторович, кандидат физико-математических наук,
генеральный директор АО «Уралавтоматика»

Под общей редакцией
Т. В. Рязановой

Новак, Е. В.

Н723 Интегральное исчисление и дифференциальные уравне-
[Электронный ресурс] : [учеб. пособие] / Е. В. Новак,
Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; [под общ. ред.
Т. В. Рязановой] ; М-во образования и науки Рос.
Федерации, Урал. федер. ун-т. – 2-е изд., стер. – М. :
ФЛИНТА : Изд-во Урал. ун-та, 2017. – 111 с.

ISBN 978-5-9765-3188-8 (ФЛИНТА)

ISBN 978-5-7996-1536-9 (Изд-во Урал. ун-та)

Учебное пособие является логическим продолжением курса
«Теория пределов, непрерывность и дифференцируемость функций»,
способствует пониманию и развитию навыков вычисления интегралов
и решения дифференциальных уравнений.

Адресовано студентам начальных курсов гуманитарных направ-
лений подготовки, изучающих основные математические структуры
в рамках дисциплины «Высшая математика».

ISBN 978-5-9765-3188-8 (ФЛИНТА)
ISBN 978-5-7996-1536-9 (Изд-во Урал. ун-та)

© Уральский федеральный
университет, 2015

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	4
1.1. Понятия неопределенного интеграла	4
1.2. Свойства неопределенного интеграла	5
1.3. Таблица основных неопределенных интегралов	6
1.4. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)	7
1.5. Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$	11
1.6. Метод интегрирования по частям	12
1.7. Интегрирование простейших рациональных дробей	14
1.7.1. Понятия о рациональных функциях	14
1.7.2. Дробно-рациональная функция	15
1.7.3. Интегрирование простейших рациональных дробей	19
1.7.4. Интегрирование рациональных дробей	20
1.8. Интегрирование тригонометрических функций	22
1.8.1. Использование тригонометрических преобразований	22
1.8.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$	23
1.8.3. Универсальная тригонометрическая подстановка	25
2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	28
2.1. Понятия определенного интеграла	28
2.2. Классы интегрируемых функций	30
2.3. Свойства определенного интеграла	30
2.4. Формула Ньютона – Лейбница	33
2.5. Геометрические приложения определенного интеграла	34
2.5.1. Вычисление площадей плоских фигур	34
2.5.2. Вычисление объемов тел вращения	40
2.6. Несобственные интегралы*	44
2.6.1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)	44
2.6.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)	46
3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	49
3.1. Основные понятия	49
3.2. Уравнения первого порядка	50

3.2.1. Задача Коши	50
3.2.2. Решение некоторых типов дифференциальных уравнений первого порядка	51
3.3. Уравнения высших порядков	61
3.3.1. Задача Коши (задача с начальным условием)	62
3.3.2. Некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка	62
Контрольная работа 1. Интегралы	67
Контрольная работа 2. Дифференциальные уравнения	95
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	108