

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И.А. Джалладова, К.Г. Валеев, В.Б. Васильев

МЕТОДЫ НОРМАЛИЗАЦИИ

Монография

Липецк
Липецкий государственный технический университет
2013

УДК 517.98

Д-49

Рецензенты:

Шамолин М.В., доктор физ. - мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова;

Феликс Садырбаев, доктор математики, зав. лабораторией Института математики и информатики Латвийского университета, член – корреспондент АН ЛР;

Вирченко Ю.П., доктор физ. – мат. наук, профессор, зав. кафедрой теоретической и математической физики НИУ БелГУ

Джалладова И.А., Валеев К.Г., Васильев В.Б. Методы нормализации: монография. - Липецк, Издательство ЛГТУ, – 2013. – 126 с.

ISBN 978-5-88247-581-8

Предложено систематизированное изложение методов нормализации, которые дают полное представление про все основные этапы их развития – с моментов возникновения и до новых современных подходов нашего времени.

Приведены и оригинальные результаты авторов, которые имеют важное практическое и теоретическое значение

Для научных работников и широкого круга специалистов, которые применяют современный математический аппарат в своей работе.

Может быть полезна студентам старших курсов, магистрам и аспирантам.

УДК 517.98

ISBN 978-5-88247-581-8

© Джалладова И.А., Валеев К.Г.,
Васильев В.Б., 2013

© ВГОБУВПО «Липецкий
государственный технический
университет», 2013

Введение

Методы усреднения были созданы в работах выдающихся математиков: И. Ньютона, Л. Эйлера, К. Гаусса, Л. Лагранжа, П. Лапласа и были усовершенствованы в работах К. Делоне, М. Линдстета, К. Гильдена, А. Пуанкаре и др. Эти методы применялись при решении задач небесной механики, при исследовании и преобразовании систем канонических дифференциальных уравнений.

Обычно выполнялась замена – переход к медленно изменяющимся переменным. При этом получали нестандартную систему дифференциальных уравнений, содержащую явно время под знаком тригонометрических функций. Метод усреднения применялся для построения замены, исключающей явное время из коэффициентов системы дифференциальных уравнений. При этом возникали сложные проблемы, связанные с исследованием сходимости используемых рядов.

Новый этап в развитии метода усреднения начался с работ Б. Ван-дер Поля, Л.И. Мандельштама, Н.Д. Папалекси, применявших методы усреднения для исследования колебательных решений неканонических систем дифференциальных уравнений. Следующий этап - работы Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и др. Новые и важные результаты были опубликованы в работах Т.Г. Стрижак [31, 32], где была использована новая операция усреднения, которая позволила существенно усовершенствовать метод усреднения. Оказалось, что метод усреднения является фактически методом сведения системы дифференциальных уравнений к нормальной форме.

Одновременно с методом усреднения в теории обыкновенных дифференциальных уравнений развивался **метод нормальных форм**.

Исходная система дифференциальных уравнений преобразуется в специальную форму, которая называется нормальной. Нормальная форма

удобна для исследования асимптотических свойств решений, в частности, для исследования устойчивости решений. Метод нормальных форм развивался в работах Д. Биркгофа, С. Стернберга, Ю. Мозера, К. Зигеля, А. Пуанкаре и др. [26]. При этом было установлено, что метод усреднения и метод нормальных форм приводят к одинаковым результатам в тех случаях, когда характеристические показатели линейного приближения находятся на мнимой оси, что выполнялось для рассматриваемых канонических систем дифференциальных уравнений.

Нормальная форма дифференциальных уравнений является **наипростейшей** эквивалентной формой исходных уравнений. Нормальная форма получается с помощью специальных замен зависимых и независимых переменных задачи с целью **максимального упрощения** структуры уравнений. В математике эти замены переменных связаны с инфинитезимальными преобразованиями **групп Ли**. В физике вопросы, связанные с нормальной формой, получили отражение в **теореме Эмми Нётер**.

Впервые идея построения нормальной формы уравнений была сформулирована выдающимся французским учёным Анри Пуанкаре в работе о новых методах небесной механики. **Основная мысль**, высказанная Пуанкаре, состоит в том, чтобы не стараться всеми силами решить исходные уравнения, а найти такую замену переменных, которая привела бы уравнения к простейшему, по возможности, к линейному виду. Используя обратную замену переменных, можно восстановить исходное решение. **Ключевой вопрос** — всегда ли существует такая взаимоднозначная замена переменных, что её результатом будут линейные уравнения, — **решен в общем случае отрицательно**. Оказалось, что, если система имеет резонанс в особой точке, то в окрестности этой точки искомой замены нет. Полученные в результате нормализующих преобразований уравнения получили краткое название **«нормальная форма»**