ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составитель
М.Б. Зверева

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2009

1. Предварительные сведения

Пусть G – множество из пространства R^n.

Множество G называют выпуклым, если вместе с каждой парой точек x, y оно содержит отрезок $[x, y]$ их соединяющий, где $[x, y] = \{\alpha x + (1-\alpha)y,\ \alpha \in [0, 1]\}$.

Простейшими примерами выпуклых множеств на плоскости могут служить круг, квадрат, треугольник.

Элемент z называют выпуклой комбинацией элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m$, если он может быть представлен в виде суммы $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_m x_m$, где все коэффициенты $\alpha_i \geq 0$, и $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Множество всех выпуклых комбинаций всевозможных конечных наборов элементов из G называется выпуклой оболочкой G и обозначается через coG.

Очевидно, отрезок – выпуклая оболочка пары точек (концов), треугольник – выпуклая оболочка трех точек, не лежащих одновременно на одной прямой. Справедлива следующая т**еорема** (критерий выпуклости). *Множество G выпукло, тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей выпуклой оболочкой, т.е.* $G = coG$.

Пусть G – замкнутое выпуклое множество. Точка x_0 называется крайней точкой для G, если она не является внутренней ни для одного из отрезков из G. Другими словами, если для любого $h \in R^n$ и любого $\varepsilon > 0$ точки $x_0 + \varepsilon h$, $x_0 - \varepsilon h$ не могут принадлежать G одновременно. Множество крайних для G точек будем обозначать через exG.

Например, если множество G – треугольник, то exG – множество вершин треугольника.

2. Теорема об экстремуме линейного функционала и ее приложения в экономике

Пусть L – линейный функционал, действующий из множества R^n, т. е.

1) $L: R^n \to R^1$

2) для любых чисел α, β и любых элементов x, y из R^n $\mathrm{L}(\alpha\,\mathrm{x} + \beta\,\mathrm{y}) = \alpha\,\mathrm{L}(\mathrm{x}) + \beta\,\mathrm{L}(\mathrm{y})$.

Теорема 1. (О представлении линейного функционала.) *Всякий линейный на R^n функционал L можно представить в виде $L(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, где c_i – вещественные числа, $x \in R^n$.*

Пусть G – компактное (ограниченное, замкнутое) множество в R^n. Ставится задача исследования функционала L на экстремум на множестве G (обозначается $\operatorname{extr}_G L$).

Точка $x_0 \in G$ называется (обозначается $x_0 \to \min_G L$) точкой минимума функционала L на множестве G, если для всех $x \in G$ справедливо неравенство $\mathrm{L}(\mathrm{x}) \geq \mathrm{L}(\mathrm{x}_0)$.

Точка $x_0 \in G$ называется (обозначается $x_0 \to \max_G L$) точкой максимума функционала L на множестве G, если для всех $x \in G$ справедливо неравенство $L(x) \leq L(x_0)$.

Точки минимума, максимума называются точками экстремума.

Теорема (Основная). (Об экстремуме линейного функционала.) *Пусть L – линейный функционал, и G – компактное (ограниченное, замкнутое) выпуклое множество в R^n. Тогда*

$$\min_G L = \min_{exG} L,$$
$$\max_G L = \max_{exG} L,$$

Доказательство. Рассмотрим, для определенности, случай минимума. По теореме Вейерштрасса, линейный функционал достигает своего минимума на компакте G. Пусть $x_0 \in G \to \min\limits_G L$.

Согласно теореме Каратеодори, всякое выпуклое компактное множество в R^n представляет собой выпуклую оболочку своих крайних точек, т. е. $G = co(exG)$. Так как $x_0 \in G$, то $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, где $\alpha_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, $x_i \in exG$. По определению минимума, для всех i (от 1 до k) верно $L(x_0) \leq L(x_i)$. Предположим, что для всех i неравенство строгое, т.е. $L(x_0) < L(x_i)$. Тогда

$$L(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i L(x_i) > L(x_0) \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = L(x_0),$$

т. е.

$$L(x_0) > L(x_0),$$

что невозможно.

Таким образом, экстремум достигается в крайней точке множества G. Теорема доказана.

Рассмотрим применения этой теоремы в некоторых экономических вопросах.

2.1. Линейный случай

В линейном случае множество G может быть описано системой линейных неравенств. Рассмотренные в этом пункте задачи относят к задачам линейного программирования.

Задача 2.1.1. Фирма выпускает 2 вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используется два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы даны в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	сливочное	шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого 16 руб., шоколадного – 14 руб. Какого количество мороженого каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Обозначим через x_1 суточный объем (в кг.) выпуска сливочного мороженого; x_2 суточный объем выпуска шоколадного мороженого. Величины x_1 и x_2 нам предстоит найти. Заметим, что по смыслу задачи $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Кроме того, учитывая данные по изучению рынка сбыта, должны выполняться условия $x_1 - x_2 \leq 100$, $x_2 \leq 350$.

От реализации сливочного мороженого фирма получит прибыль $16x_1$ руб., а от реализации шоколадного мороженого прибыль будет составлять $14x_2$ руб. Тогда прибыль фирмы от реализации всей продукции составит

$$F = 16x_1 + 14x_2. \tag{2.1.1}$$

Естественно, прибыль предприятия будет тем больше, чем больше x_j, но беспредельно увеличивать объем выпуска нам не дадут ограниченные исходные продукты (ресурсы), из которых изготовляется мороженое. Действительно, количество молока, которое потребуется для производства запланированной продукции, составит $0,8x_1 + 0,5x_2$ кг и не должно пре-