

УДК 517:9:539:3

ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНАЯ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ СОСТАВНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

С. К. Годунов

Институт математики им. С. Л. Соболева, 630090 Новосибирск

E-mail: godunov@math.nsc.ru

Описана формализация в виде гиперболической системы для гидродинамики многофазной среды или смеси с учетом химических реакций. Выделены дополнительные условия, совместные с системой, которым должны подчиняться решения, чтобы обеспечить сохранение энергии и импульса.

Ключевые слова: производящий потенциал, гиперболичность, диссипация, энтропия.

Введение. Широкое использование разнообразных математических моделей сплошных сред в промышленных расчетах и теоретических исследованиях поставило задачу формализовать законы термодинамики, которым должны подчиняться системы уравнений, управляющие поведением решений таких моделей.

Примеры таких формализаций описаны в [1–5]. Настоящая работа продолжает коллоквионирование систем галилеево-инвариантных уравнений, для конкретизации которых достаточно задания одного производящего потенциала L , выраженного через неизвестные функции u_i, q_j, \dots, T .

В п. 1 рассматриваются уравнения газовой динамики, в которых газ является смесью реагирующих между собой химических веществ. По существу, здесь речь идет об еще одной возможной формулировке, использующей хорошо известное описание реакций при помощи закона действующих масс. Нам пришлось в качестве неизвестных функций вместо обычных потенциалов Гиббса выбрать некоторые их комбинации, более удобные при использовании эйлеровых координат.

Уравнения из п. 2 можно рассматривать как усложненный вариант уравнений из п. 1. Среда здесь также считается смесью реагирующих веществ, но предполагается, что эти вещества раздроблены на мелкие, примыкающие друг к другу ячейки, фазовые переходы между которыми моделируются уравнениями того же типа, что и реакции в п. 1. Хотя ячейки рассматриваются как микроскопические детали, составляющие макроскопическую среду, описываемую нашими уравнениями, наличие этих деталей является причиной, по которой нужно учитывать неоднородность внутри ячеек поля скоростей (можно, например, предполагать, что движение границ ячеек вызывает в них эффект “присоединенных масс”, благодаря которому скорости вблизи границ отличаются от скоростей в центрах ячеек, или что ячейки-пузырьки перемещаются относительно основной массы, в которую они вкраплены). Для учета такого рода неоднородностей мы, кроме усредненного по соседним ячейкам вектора импульса с компонентами ρu_i , используем для каждого вещества еще одну векторную характеристику с компонентами $v_i^{(j)}$, имеющую размерность количества движения и характеризующую неоднородность поля скоростей. (При переходе в новую систему координат, движущуюся с постоянной скоростью относительно старой, компоненты u_i заменяются на $u_i + U_i$, тогда как $v_i^{(j)}$ не меняются.)

Наша модель возникла как естественное формальное видоизменение уравнений, используемых физиками для сверхтекучих жидкостей (см. [6]). Конкретным поводом для ее создания послужили теоретические работы [7–9] по моделированию жидкости с вкрапленными пузырьками. В этих работах была отмечена необходимость введения двух полей скорости для учета присоединенных к пузырькам масс жидкости. К сожалению, нам не удалось использовать результаты работ [7–9] при выводе наших уравнений, описывающих среду, в которой элементы содержат усреднения по большому числу пузырьков. Отчасти это вызвано тем, что в этих работах жидкость несжимаемая, а у нас сжимаемость учитывается, а отчасти, тем что неясно, как завершить эти работы, учитывая статистику колебаний пузырьков, что позволило бы учесть их воздействие на среду термодинамическим путем.

Мы не пытаемся выводить изучаемые в п. 2 уравнения и ограничиваемся приведенным выше кратким пояснением причин выбора параметров, описывающих среду. В то же время мы очень подробно обосновываем корректность (в локальном смысле) изучаемых уравнений в бездиссипативном варианте. Оказывается, наша система является симметрической гиперболической и можно выделить класс ее решений, на которых выполнены физически осмысленные законы сохранения. Включение реакций и диссипативных членов не нарушает, а видоизменяет эти законы сохранения, превращая один из них в закон возрастания энтропии.

Все эти факты, по существу, служат обоснованием разумности выбора предлагаемой системы из вовсе нетривиальных теоретических соображений. Нам хотелось бы привлечь внимание специалистов, изучающих многофазные среды, к обсуждению описываемой модели. Эту модель, конечно, нельзя считать окончательной, однако мы надеемся, что ее анализ может оказаться полезным.

1. Газовая динамика в почти равновесной химической среде. Состояние элемента среды, рассматриваемой в этом пункте, описывается давлением P , температурой T , а также внутренней энергией E , энтропией S и объемом V , приходящимися на единицу массы. Плотность ρ связана с удельным объемом равенством $\rho = 1/V$. Химический состав описывается числами N_j — количеством грамм-молекул j -го вещества в единице массы (в одном грамме). При этом

$$\rho = \sum_j \rho N_j, \quad \sum_j N_j = 1.$$

Через u_i обозначаются компоненты скорости перемещения центра тяжести элемента.

Так называемый термодинамический потенциал среды

$$\Phi = E - TS + PV$$

задается уравнением состояния

$$\Phi = \Phi(T, P, N_1, N_2, \dots).$$

Термодинамическое тождество

$$d\Phi = -S dT + V dP + \mu_k dN_k$$

связывает Φ с параметрами S , V и так называемыми химическими потенциалами Гиббса μ_j . Из этого тождества следует

$$\begin{aligned} dP &= \rho d(\Phi - \mu_k N_k - u_i u_i / 2) + \rho u_i du_i + \rho S dT + \rho N_j d\mu_j = \\ &= \left(\sum_j \rho N_j \right) d(\Phi - \mu_k N_k - u_i u_i / 2) + \rho u_i du_i + \rho S dT + \rho N_j d\mu_j = \\ &= \rho N_j d(\mu_j + \Phi - \mu_k N_k - u_i u_i / 2) + \rho u_i du_i + \rho S dT. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$q_j = \mu_j + (\Phi - \mu_k N_k) - u_i u_i / 2, \quad L = P,$$

получаем термодинамическое соотношение

$$dL = \rho N_j dq_j + \rho u_i du_i + \rho S dT$$

для производящего потенциала L , с помощью которого будет описываться система уравнений, управляющая движением среды и процессами в ней. Этот производящий потенциал задается уравнением состояния

$$L = L(q_1, q_2, \dots, u_1, u_2, u_3, T) = \Lambda(q_1 + u_i u_i / 2, q_2 + u_i u_i / 2, \dots, T).$$

При этом

$$\rho N_j = L_{q_j}, \quad \rho u_i = L_{u_i}, \quad \rho S = L_T, \quad \rho = \sum_j L_{q_j},$$

а полная энергия \mathcal{E} (внутренняя и кинетическая) единицы объема определяется формулой

$$\rho(E + u_i u_i / 2) = \mathcal{E} = q_j L_{q_j} + u_i L_{u_i} + T L_T - L.$$

Иными словами, \mathcal{E} — это преобразование Лежандра потенциала L по его аргументам q_j , u_i , T .

Если движение среды не сопровождается химическими реакциями, то оно описывается уравнениями газовой динамики

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_k + P)}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \rho N_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \rho N_j)}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \rho S)}{\partial x_k} = 0,$$

в записи которых уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \rho)}{\partial x_k} = 0$$

заменено на законы сохранения масс

$$\frac{\partial \rho N_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \rho N_j)}{\partial x_k} = 0$$

для каждого компонента. Сумма равенств, выражающих эти законы, совпадает с уравнением неразрывности. С использованием введенных нами обозначений уравнения газовой динамики переписываются так:

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial L_{q_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_j}}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_T}{\partial x_k} = 0.$$

Линейная комбинация выписанных равенств с коэффициентами u_i , q_j , T соответственно на основании тождеств

$$u_i dL_{u_i} + q_j dL_{q_j} + T dL_T = d\mathcal{E},$$

$$u_i d(u_k L)_{u_i} + q_j d(u_k L)_{q_j} + T d(u_k L)_T = d[u_k (\mathcal{E} + L)]$$

приводит к закону сохранения энергии

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial [u_k (\mathcal{E} + L)]}{\partial x_k} = 0.$$