МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики и теории механизмов и машин

Ю.Л. ВЛАСОВ

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2004

ББК 22.213 Я 73
В 58
УДК 531.3 (07)

Рецензент
доцент А.С. Зиновьев

Власов Ю.Л.
В 58 Малые колебания системы с одной степенью свободы: Методические указания к расчетно-графической работе по дисциплине «Прикладные задачи динамики твердого тела».-Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004.-22 с.

Методические указания включают теоретическое изложение материала, контрольное задание, пример выполнения задания и вопросы для самопроверки.

Методические указания предназначены для выполнения расчетно-графической работы по дисциплине «Прикладные задачи динамики твердого тела» для студентов специальностей 150200 и 230100 заочного обучения.

ББК 22.213 Я 73

Введение

Во многих областях современной техники часто возникают колебательные движения различных механических систем.

Колебания или, так называемые, вибрации машин и их деталей, при неблагоприятных обстоятельствах могут вызвать значительные деформации и напряжения и, как следствие, быстрый износ конструкций и их разрушение.

Вибрации возникают в результате динамического воздействия разнообразных факторов: они могут быть вызваны ударами и подвижными нагрузками, неуравновешенными частями машин, переменным давлением пара, газа, воды, ветра и т.д.

Теория колебаний механических систем – один из самых обширных и развитых разделов теоретической механики, имеющий большое прикладное значение.

В настоящее время особое значение приобретают различные виды колебаний автомобилей в связи с возрастанием их скорости движения.

Создание рациональных конструкций, а также специальных устройств – так называемых гасителей колебаний, широко применяемых в современной технике для механизации ряда производственных процессов, основаны на положениях, устанавливаемых теорией колебаний.

Изучение колебательных движений требует для рассмотрения широкого использования различных математических методов.

1 Общие положения

1.1 Малые колебания системы около положения равновесия

Если обобщенные координаты системы в положении равновесия принимать равными нулю, т.е. отсчитывают их от положения равновесия, то колебательным движением в общем случае можно считать такое движение, при котором все обобщенные координаты или часть из них принимают нулевые значения, по крайней мере, несколько раз.

Малые колебания системы представляют собой такое движение, при котором значения обобщенных координат и обобщенных скоростей в любой момент времени настолько малы, что их можно рассматривать как величины первого порядка малости.

Рассмотрим механическую систему, находящуюся под действием сил, имеющих потенциал. Такую систему сил называют консервативной.

Для консервативной системы уравнения равновесия сил имеют вид:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0,$$

где П – потенциальная энергия механической системы,

q_i - $i^{\text{ая}}$ обобщенная координата.

Следовательно, потенциальная энергия в положении равновесия достигает своего экстремального значения.

Состояние равновесия механической системы может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным.

Состояние равновесия механической системы называется устойчивым, если эта система, выведенная из положения равновесия, совершает колебания около этого положения.

Состояние равновесия механической системы называется неустойчивым, если при сколь угодно малом отклонении системы из положения равновесия она удаляется от этого положения и колебаний около этого положения не возникает.

Состояние равновесия механической системы называется безразличным, если при отклонении ее из этого положения она и новом положении может оставаться в состоянии равновесия.

Механическая система может совершать малые колебания только вблизи устойчивого положения равновесия.

Строгое определение понятия устойчивого положения равновесия было дано А.М. Ляпуновым:

Равновесие системы называется устойчивым, если для всяких, как угодно малых положительных чисел ε_1 *и* ε_2 *можно выбрать два других малых положительных числа* η_1 *и* η_2*, что при начальных возмущениях, удовлетворяющих условиям:*

$$\left| \overset{o}{q_i} \right| < \eta_1; \qquad \left| \dot{q}_i^{\,o} \right| < з_2,$$

в дальнейшем движении механической системы выполняется условие

$$\left| q_i(t) \right| < \varepsilon_1; \qquad \left| \dot{q}_i(t) \right| < \varepsilon_2,$$

для каждой обобщенной координаты.

Достаточное условие устойчивости равновесия консервативной системы определяется теоремой Лагранжа-Дирихле:

если в положении равновесия консервативной системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Чтобы определить, устойчиво ли состояние равновесия в рассматриваемом положении системы, необходимо выяснить, имеет ли потенциальная энергия системы в этом положении минимум.

В том случае, если

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=0} > 0,$$

то условие минимума будет выполнено.

Механическая система с одной степенью свободы в случае голономных, идеальных связей имеет одну обобщенную координату q и ее движение описывается одним уравнением Лагранжа второго рода:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = Q, \tag{1.1}$$

где Т – кинетическая энергия системы;

q – обобщенная координата;

Q – обобщенная сила.

1.2 Свободные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим малые колебания системы с одной степенью свободы под действием одних потенциальных сил, т.е. когда

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$

Считаем, что сил сопротивления и возмущающих сил нет. Такие колебания называются собственными, или свободными. Колебания считаются малыми, если при движении системы обобщенная координата и обобщенная скорость достаточно малы и в уравнении Лагранжа (1.1) можно пренебречь всеми членами второго и более высокого порядка относительно обобщенной координаты и обобщенной скорости. В случае малых колебаний системы получается линейное дифференциальное уравнение для обобщенной координаты q.

1.3 Дифференциальное уравнение свободных колебаний системы

Для вывода из уравнения Лагранжа (1.1) дифференциального уравнения малых свободных колебаний следует разложить кинетическую и потенциальную энергии в ряды в окрестности положения равновесия системы, где $q = 0$.