

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет  
им. П. Г. Демидова

**В. Ш. Бурд**

Дискретное операторное исчисление  
и линейные разностные уравнения

*Учебное пособие*

*Рекомендовано*  
*Научно-методическим советом университета*  
*для студентов, обучающихся по специальности*  
*010200 Прикладная математика и информатика*

Ярославль 2009

УДК 517.929  
ББК В161.62<sub>я</sub>73  
Б 91

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2009/10 года*

Рецензенты:

А. В. Проказников, д-р физ.-мат. наук, Ярославский филиал  
Учреждения Российской академии наук Физико-технологического  
института РАН;  
кафедра математического анализа ЯГПУ им. К. Д. Ушинского.

**Б 91 Бурд, В. Ш.** Дискретное операторное исчисление и линейные разностные уравнения: учеб. пособие / В. Ш. Бурд; науч. ред. С. Д. Глызин; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2009 — 156 с. ISBN 978-5-8397-0694-1

Пособие посвящено элементарному изложению теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами на базе дискретного операторного исчисления. Рассматриваются также некоторые задачи теории чисел, алгебры и анализа, в которых появляются линейные разностные уравнения второго порядка. В частности, дается введение в теорию непрерывных дробей.

Пособие содержит много упражнений, которые должны помочь овладеть техникой решения линейных разностных уравнений с помощью дискретного операторного исчисления.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 010200 Прикладная математика и информатика (дисциплина «Линейные разностные уравнения», блок СД), очной формы обучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт № 02.740.11.0197).

Библиогр.: 29 назв.

ISBN 978-5-8397-0694-1

УДК 517.929  
ББК В161.62<sub>я</sub>73

© Ярославский государственный  
университет им. П. Г. Демидова, 2009

# Оглавление

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава 1. Дискретное операторное исчисление</b>	<b>7</b>
1.1. Свертка функций дискретного аргумента . . . . .	7
1.1.1. Свойства свертки . . . . .	7
1.1.2. Оператор суммирования . . . . .	10
1.2. Операторы. Операторное исчисление . . . . .	15
1.2.1. Замечание о $Z$ -преобразовании . . . . .	25
1.2.2. Производящие функции . . . . .	26
<b>Глава 2. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами</b>	<b>32</b>
2.1. Линейные разностные уравнения первого порядка . . . . .	32
2.1.1. Уравнения с постоянным коэффициентом в однородной части . . . . .	32
2.1.2. Уравнения, которые преобразуются в линейные уравнения первого порядка . . . . .	35
2.1.3. Уравнения с периодической неоднородностью . . . . .	38
2.1.4. Уравнения с переменным коэффициентом в однородной части . . . . .	39
2.1.5. Уравнения с периодическими коэффициентами . . . . .	42
2.2. Линейные разностные уравнения второго порядка . . . . .	43
2.2.1. Операторный метод решения . . . . .	43
2.2.2. Примеры неоднородных уравнений . . . . .	47
2.2.3. Общее решение однородного уравнения . . . . .	52
2.2.4. Некоторые уравнения с переменными коэффициентами . . . . .	58
2.2.5. Некоторые нелинейные уравнения . . . . .	64
2.3. Некоторые приложения . . . . .	66
2.3.1. Числа Фибоначчи . . . . .	66
2.3.2. Непрерывные дроби . . . . .	72
2.3.3. Определители трехдиагональных матриц . . . . .	88
2.3.4. Многочлены Чебышева . . . . .	93

2.3.5.	Краевые задачи для разностных уравнений . . . . .	98
2.4.	Однородные уравнения $k$ -го порядка . . . . .	99
2.4.1.	Построение общего решения . . . . .	105
2.5.	Неоднородные уравнения $k$ -го порядка . . . . .	113
2.5.1.	Решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями . . . . .	114
2.5.2.	Вычисление частного решения, когда правая часть уравнения является квазимногочленом . . . . .	115
2.5.3.	Вычисление конечных сумм . . . . .	123
2.5.4.	Метод комплексных амплитуд . . . . .	129
2.5.5.	Некоторые уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами . . . . .	135
2.6.	Системы разностных уравнений . . . . .	137
2.6.1.	Схема применения операторного метода для решения системы разностных уравнений . . . .	137
2.6.2.	Решение системы двух разностных уравнений . . .	138
2.6.3.	Вычисление матрицы $A^n$ . . . . .	145
2.6.4.	Вычисление подходящих дробей для периодической непрерывной дроби с периодом $l \geq 2$ . . . . .	147

## Литература

**153**

# Предисловие

Эта книга посвящена элементарному изложению теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Изложение базируется на дискретном операторном исчислении, являющимся дискретным аналогом операторного исчисления Микусинского.

Символические методы для решений разностных уравнений с постоянными коэффициентами развивались еще в 19-м веке. Они описываются в книге Дж. Буля [1], первое издание которой вышло в 1860 году. Строгое обоснование символических методов решения разностных уравнений с постоянными коэффициентами было получено на основе  $Z$ -преобразования. Это преобразование — дискретный аналог преобразования Лапласа. Элементы дискретного операторного исчисления были изложены в работах Moore [11] и Brand [2] (см. также [3] и [4]).

В настоящей книге на основе дискретного операторного исчисления строится общая теория разностных (рекуррентных) уравнений с постоянными коэффициентами. Изложение этой теории во многих аспектах более полное, чем в руководствах Elaydi [5], Jordan [6], Kelley, Peterson [7], Miller [10], Spiegel [14].

Операторные формулы дают представление дискретных функций через оператор обратный к оператору сдвига. Он является дискретным аналогом оператора дифференцирования в операторном исчислении Микусинского. Это позволяет простейшим путем получить явные формулы для решения однородных и неоднородных разностных уравнений.

Книга состоит из двух глав.

Первая глава посвящена построению операторного исчисления. Определяются алгебраические операции для дискретных функций, причем роль умножения играет свертка дискретных функций. Операторы вводятся как дроби  $a/b$ , где  $a$  и  $b$  — дискретные функции. В этой же главе вводятся производящие функции. Методы операторного исчисления и производящие функции применяются к доказательству тождеств с биномиальными коэффициентами.

Во второй главе излагается теория линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Первый и второй разделы посвящены линейным разностным уравнениям первого и второго порядков. Операторный метод позволяет не только получить решение конкретного разностного уравнения, но и изучить структуру решений общего однородного и неоднородного уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассматриваются линейные уравнения с переменными коэффициентами и нелинейные уравнения, которые преобразуются в