

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Обыкновенные дифференциальные уравнения
Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Е.П. Белоусова,
И.Д. Коструб,
Т.И. Смагина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2009

Задания предназначены студентам 2 курса дневного и вечернего отделений для самостоятельной работы по дифференциальным уравнениям. Кроме задач, приведены контрольные вопросы, позволяющие студентам проверить себя и выяснить качество усвоения материала.

В каждом разделе дается ссылка на соответствующие разделы учебной литературы.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – М. : Физматлит, 2002. – 232 с.
- [2]. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М. : Наука, 1982. – 332 с.
- [3]. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – М. : Наука, 2000. – 176 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [4]. Боровских А.В. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / А.В. Боровских, А.И. Перов. – М. – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 540 с.
- [5]. Краснов М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М. : Высш. шк., 1978. – 287 с.
- [6]. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения : примеры и задачи / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк – М. : Высш. шк., 1989. – 383 с.

Отсюда

$$x(t) = 0,04 + ce^{-at/10800}.$$

Из начального условия $x(0) = 0,12$ найдем, что $c = 0,08$. Следовательно,

$$x(t) = 0,04 + 0,08e^{-at/10800}.$$

Для определения мощности вентиляторов a воспользуемся условием $x(10) = 0,06$. Имеем $0,06 = 0,04 + 0,08e^{-a/1080}$, откуда

$$a = 1080 \ln 4 \approx 1500 \text{ (м}^3/\text{мин)}.$$

Пример 2. Сосуд, площадь $S = S(h)$ поперечного сечения которого есть известная функция высоты h , наполнен жидкостью до уровня H . В дне сосуда имеется отверстие площади ω , через которое жидкость вытекает. Известна скорость $v = v(h)$ изменения объема V жидкости в сосуде от уровня h жидкости в сосуде (напора). Определить время t , за которое уровень жидкости понизится от начального положения H до произвольного h и время T полного опорожнения сосуда.

Решение. Пусть высота жидкости в сосуде в момент времени t равна h . Количество жидкости ΔV , вытекающее из сосуда за промежуток времени от t до $t + \Delta t$, можно подсчитать как объем цилиндра с площадью основания ω и высотой $v(h)$. Таким образом, $\Delta V = \omega v(h) \Delta t$. Этот же объем жидкости может быть вычислен другим способом. Вследствие утечки воды уровень h жидкости в сосуде понизится на величину Δh , следовательно, $dV = -S(h) \Delta h$ (знак минус берется потому, что $\Delta h < 0$). Приравнявая друг другу оба выражения для ΔV , составим уравнение

$$\omega v(h) \Delta t = -S(h) \Delta h.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и разделяя переменные, получим

$$dt = -\frac{S(h)}{\omega v(h)} dh,$$

откуда

$$t = \frac{1}{\omega} \int_h^H \frac{S(h)}{v(h)} dh.$$

Время T полного опорожнения сосуда определится по формуле

$$T = \frac{1}{\omega} \int_0^H \frac{S(h)}{v(h)} dh.$$

Если истечение происходит через малый патрубок, то $v = \mu\sqrt{2gh}$, где g — ускорение силы тяжести, μ — коэффициент расхода. Для воды $\mu = 0,6$.

Пример 3. Влага, содержащаяся в свежеспеченном хлебе, испаряется в окружающую среду со скоростью, пропорциональной количеству влаги в хлебе, а также разности между влажностью насыщенного и окружающего воздуха. Некоторое количество свежеспеченного хлеба, содержащего 3 кг влаги, положено в помещение объемом 100 м^3 , воздух которого первоначально имел влажность 25 %. Насыщенный воздух при той же температуре содержит 0,12 кг влаги на 1 м^3 . Если в течение первых суток хлеб потерял половину своей влаги, то сколько влаги в нем останется по истечении вторых суток?

Решение. Пусть $x(t)$ кг — количество влаги в хлебе в момент времени t . Влажность насыщенного воздуха равна

$$\frac{0,12 \text{ кг} \cdot 100 \text{ м}^3}{1 \text{ м}^3} = 12 \text{ кг};$$

первоначальная влажность воздуха

$$\frac{12 \text{ кг} \cdot 25 \%}{100 \%} = 3 \text{ кг}.$$

Следовательно, влажность воздуха в момент времени t равна $(3+3-x)$ кг. Согласно условию задачи имеем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx(x+6).$$

Откуда

$$\frac{x}{x+6} = Ce^{6kt}.$$

Из начального условия $x(0) = 3$ находим, что $C = 1/3$. Так как $x(1) = 3/2$, то $e^{6k} = 3/5$. Поэтому

$$x(t) = [x(t) + 6] \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5} \right)^t$$

и, следовательно,

$$x(2) = 0,82 \text{ кг}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. а) Цилиндрический бак высотой 6 м и диаметром основания 4 м поставлен вертикально и наполнен водой. За какое время вода, заполняющая бак, вытечет из него через круглое отверстие радиуса $1/12$ м, сделанное в баке?

Ответ: $t \approx 17,7$ мин.

б) Ветер, проходя через лес, испытывая сопротивление деревьев, теряет скорость. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости ветра в начале пути и длине этого пути. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу 150 м, зная, что начальная его скорость была 12 м/с, после прохождения в лесу пути в 1 м скорость уменьшилась до 11,8 м/с.

Ответ: $v \approx 0,93$ м/с.

2. а) В сосуд, содержащий 30 л воды, непрерывно со скоростью 5 л/мин поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 мин?

Ответ: $x(5) \approx 5,05$ кг.

б) Материальная точка массой 2 г без начальной скорости медленно погружается в жидкость. Найти её скорость через 2 секунды, считая, что при медленном погружении сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости погружения (коэффициент погружения 1).

Ответ: $v \approx 12,36$ м/с.

3. а) Популяция бактерий увеличивается таким образом, что скорость роста в момент t (время выражается в часах) составляет величину $1/(1 + 2t)$. Начальной популяции соответствует 500 особей. Какой будет популяция после 6 часов роста? после 8,5 часов?

Ответ: $\approx 578; 706$.

б) Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности 50 м/с.

Ответ: $v(t) = 50 \tanh t/5$; $t = (4 + \ln 2) \approx 23$ с.

4. а) Цилиндрический бак длиной 6 м и диаметром 4 м расположен горизонтально. За какое время вода вытечет из бака, если отверстие радиуса $1/12$ м находится на уровне самой нижней из образующих цилиндра?

Ответ: $t \approx 18,4$ мин.